Examen : 2h

November 25, 2004

Présentation générale : Ce sujet contient deux parties distinctes qui ont toutes deux comme point de départ un modèle de transport corpusculaire de type "équation de Boltzmann" qui est communément présenté sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\vec{grad}_X(f) + div_V(\frac{\vec{F}}{m}f) = C(f) \tag{1}$$

Dans cette écriture f est la fonction de distribution et $\vec{F}$ est un champs de force permettant de rendre compte de l'acceleration des corpuscules lorsques ceux-ci peuvent être modélisés comme des masses ponctuelles (toutes de même masse m) dans le cadre de la mécanique classique. Le terme de droite $C(f)$ est le terme collisionnel qui sera précisé indépendamment dans chaque partie.

Dans la partie A on étudiera un problème de transfert radiatif et dans la partie B un problème de transport de particules chargées électriquement. Ces problèmes d'apparence très distincts seront abordés à partir de la même base méthodologie et nous verons comment dans les deux cas on aboutit à des mécanismes de type diffusif à l'échelle macroscopique.

PARTIE A

On étudie ici un problème de transfert radiatif stationnaire en approximation semi-classique dans des milieux à indice de réfraction uniforme égal à l'unité (vitesse de propagation égale à la vitesse de la lumière dans le vide).

La géométrie du système considéré est monodimensionnelle (même si le rayonnement se propage quand à lui dans toutes les directions de l'espace) et on note Ox le repère monodimensionnel associé. Il s'agit d'une couche de gaz contenue entre deux plans parallèles, perpendiculaires à Ox, intersectant Ox en $x = 0$ et en $x = e$ (couche d'épaisseur e). Les caractéristiques du gaz (propriétés radiatives, température) ne dépendent que de la coordonnée x.

La couche est non diffusive (albedo de diffusion simple nul) et le coefficent d'absorption $k_{a,\nu}$ (inverse du libre parcours moyen d'absorption) est uniforme. La luminance incidente sur la couche est nulle sur ses deux faces (luminance nulle dans toutes les directions entrantes). Le profil de température est linéaire au sein de la couche. On admet de plus que les variations de température sont faibles et que par conséquent la fonction de distribution à l'équilibre suit également un profil linéaire à la traversée de la couche : $f_\nu^0(x) = \alpha_\nu x + \beta_\nu$. La luminance du rayonnement d'équilibre (luminance de Planck) suit donc elle aussi un profil linéaire : $L_\nu^0(x) = \gamma_\nu x + \delta_\nu$.

1- Question de cours (3pts) :

- Donner la forme que prend l'équation de transport (en termes de fonction de distribution) lorsqu'elle est appliquée au transport de photons en milieu à indice de réfraction uniforme, dans le cas général (absorption, diffusion et emission).
- Rappeler ses conditions de validité.
- Reécrire cette équation en termes de luminance (équation de transfert radiatif) et donner la version simplifiée de l'équation de transfert radiatif qui correspond aux conditions du problème (stationnaire, sans diffusion).

2- Analyses de résultats (3pts) : Dans cette seconde partie, la couche est isotherme ($\alpha_\nu = 0$, $\gamma_\nu = 0$).

Les figures qui suivent présentent des résultats d'expérience où l'on mesure le rayonnement sortant de la couche (d'un côté ou de l'autre puisque le problème est symétrique).

- Dans la figure 1, il s'agit de la luminance sortant selon la direction normale à la couche de gaz et on regarde comment cette luminance évolue en fonction de l'épaisseur de la couche ($k_{a,\nu}$ étant fixé à la valeur $k_{a,\nu} = 1m^{-1}$).
- Dans la figure 2 et la figure 3, il s'agit de la luminance sortant en fonction de $cos\theta$ où θ est l'angle entre la direction d'observation et la normale sortante. Le coefficient d'absorption et l'épaisseur sont fixés : $k_{a,\nu} = 1m^{-1}$ et $e = 0.01m$ pour la figure 2 et $k_{a,\nu} = 1m^{-1}$ et $e = 2m$ pour la figure 3.

Pour les trois figures, les unités des luminances mesurées sont arbitraires. Vous analyserez qualitativement ces trois courbes et vous essayerez de quantifier les valeurs de luminance en quelques points en fonction de δ_ν. Chaque formulation utilisée devra être démontrée à partir de l'équation de transfert radiatif.

3- Passage de l'ETR à l'approximation de diffusion (4pts) : Dans cette troisième partie, la couche n'est plus isotherme ($\alpha_\nu \neq 0$, $\gamma_\nu \neq 0$).

- Exprimer la luminance sortant de la couche en $x = 0$ en fonction de $cos\theta$ où θ est l'angle entre la direction d'observation et la normale sortante.
- Que devient cette luminance à la limite $k_{a,\nu}e >> 1$? Interpréter ce résultat en termes de libre parcours moyen d'absorption.
- A la limite $k_{a,\nu}e >> 1$, exprimer la densité surfacique de flux d'énergie sortant de la couche.
- Toujours à la limite $k_{a,\nu}e >> 1$, en vous plaçant à $x = e/2$, exprimer la densité surfacique de flux d'énergie correspondant aux photons se propageant dans des directions à x croissant et de même exprimer la densité surfacique de flux d'énergie correspondant aux photons se propageant dans des directions à x décroissant. En déduire une expression du vecteur densité de flux radiatif.
- En revenant à la définition de α_ν ou de γ_ν, montrer que ce vecteur densité de flux radiatif s'exprime en fonction du gradient de température et donc que la propagation du rayonnement est compatible, à l'échelle macroscopique, avec un mécanisme de diffusion thermique.

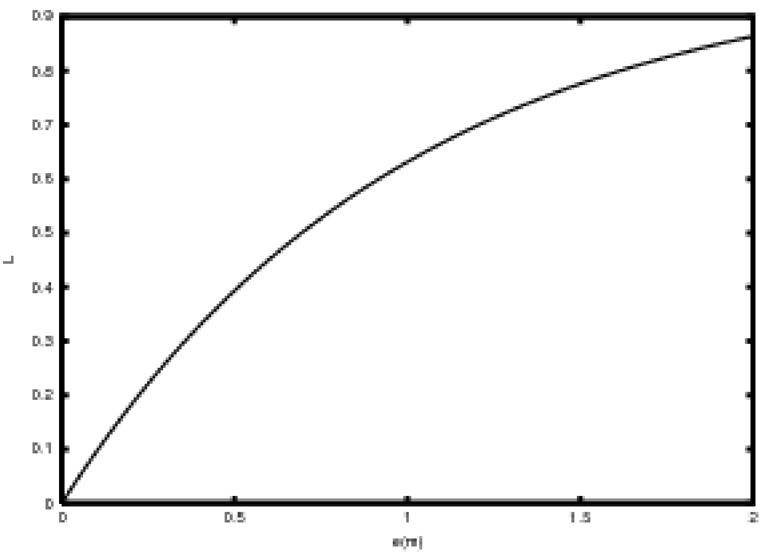

Figure 1: Luminance dans la direction normale en fonction de e pour $k_{a,\nu} = 1m^{-1}$

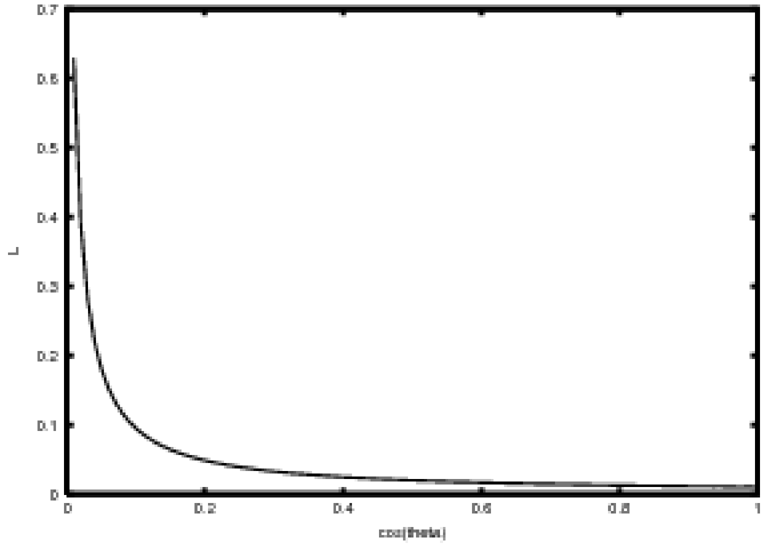

Figure 2: Luminance en fonction de $cos(\theta)$ pour $k_{a,\nu} = 1m^{-1}$ et $e = 0.01m$

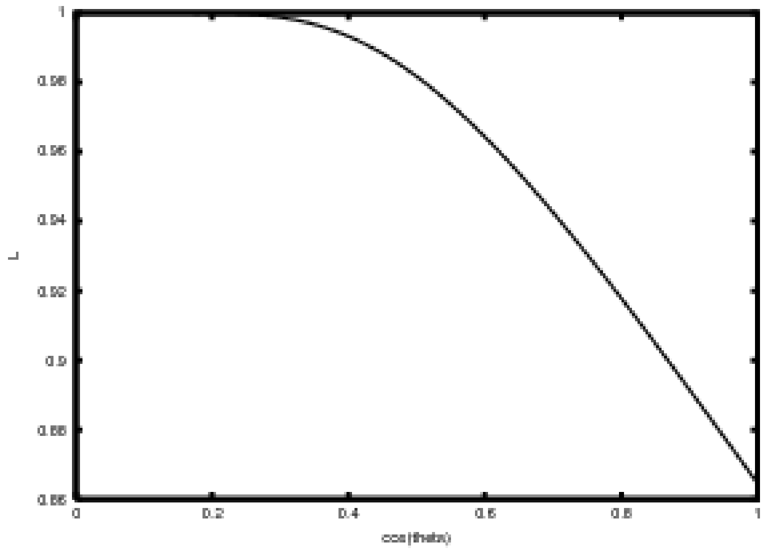

Figure 3: Luminance en fonction de $cos(\theta)$ pour $k_{a,\nu} = 1m^{-1}$ et $e = 2m$