Examen M2R : Approche statistique des transferts - I

Problème 1

Nous considérons à nouveau l'exemple, abordé en cours, où deux parois planes en mouvement confinent un gaz raréfié. Les conditions du problème et l'état stationnaire correspondant (masse volumique et vitesse) sont donnés en Annexe.

Q1 : Rédigez précisément les arguments théoriques et les développements formels permettant de retrouver cette solution stationnaire.

Q2 : Expliquez qualitativement pourquoi la vitesse macroscopique du fluide au stationnaire n'est pas nulle alors que les deux parois ont le même module de vitesse et se déplacent en sens opposés. Expliquez en particulier pourquoi, lorsque la différence de température est élevée, la vitesse moyenne du gaz est proche de la vitesse de la paroi la plus froide.

Partant de cet état stationnaire, à instant $t = 0$, on déclenche un flux d'électrons d'énergie élevée qui peuvent rentrer en collision avec les molécules du gaz. Chaque collision se traduit par une ionisation : la molécule est remplacée par un ion et donc la molécule disparait. Le nombre total de molécules (par m^2 de canal), qui était $N = \frac{\mu}{m}$ (voir les notations de l'Annexe) à l'instant $t = 0$, ne peut donc que décroitre. Les libres temps de vie des molécules suivent une distribution exponentielle et on note τ le libre temps de vie moyen. τ est constant et uniforme. Il est également indépendant de la vitesse moléculaire (les vitesses des molécules sont tellement faibles devant les vitesses électroniques que la fréquence de collision est la même que si les molécules étaient au repos).

Q3 : Donnez l'évolution temporelle des champs de densité moléculaire et de vitesse macroscopique (en faisant appel à une démonstration complète ou à des arguments précis).

Problème 2

Des biologistes souhaitent utliser l'équation de Boltzmann pour étudier le comportement de moutons qui

- soit se déplacent en ligne droite tout en broutant (module de vitesse c_b constant)
- soit se déplacent en ligne droite en levant la tête, en état de vigilance (module de vitesse c_v constant)

Les moutons peuvent changer de direction et ces évènements de changement de direction sont quasi-instantannés. Lorsque le mouton choisit une nouvelle direction il la choisit aléatoirement de façon isotrope. Les moutons peuvent aussi changer d'état (passage du brout à la vigilence ou passage de la vigilence au brout). Ces changements d'état sont également quasi-instantannés.

Pour décrire ces moutons, les biologistent utilisent deux fonctions de distribution,

— $f_b(\vec{x}, \vec{\omega}, t)$ pour les moutons au brout

— $f_v(\vec{x}, \vec{\omega}, t)$ pour les moutons en état de vigilence

où $\vec{x}$ est le vecteur position, $\vec{\omega}$ le vecteur unitaire indiquant la direction du déplacement et t le temps. Ils admettent que les équations d'évolution suivantes sont valables :

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + c_b \vec{\omega}.\vec{grad}(f_b) = -\frac{1}{\tau_{dir}} f_b - \frac{1}{\tau_{bv}} f_b + S_b$$

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} + c_v \vec{\omega}.\vec{grad}(f_v) = -\frac{1}{\tau_{dir}} f_v - \frac{1}{\tau_{vb}} \cancel{f_b}\, f_v + S_v$$

avec

$$S_b = \int_\Omega \frac{1}{\tau_{dir}} f_b' \frac{1}{2\pi} d\vec{\omega}' + \frac{1}{\tau_{vb}} f_v$$

$$S_v = \int_\Omega \frac{1}{\tau_{dir}} f_v' \frac{1}{2\pi} d\vec{\omega}' + \frac{1}{\tau_{bv}} f_b$$

où l'ensemble de toutes les directions possibles est noté Ω et où on note $f_b' \equiv f_b(\vec{x}, \vec{\omega}', t)$ et $f_v' \equiv f_v(\vec{x}, \vec{\omega}', t)$. Les grandeurs τ_{bv}, τ_{vb} et τ_{dir} sont des constantes et sont indépendantes de la position et de la direction de déplacement.

Q1 : Proposez une interprétation détaillée de ces deux équations de Boltzmann. Quel sens donnez-vous à τ_{bv}, τ_{vb} et τ_{dir} ?

Q2 : Des enregistrements video permettent de suivre la trajectoire de chaque mouton et de détecter et analyser les phases de changement d'état. A partir de ces données expérimentales, comment pourriez-vous controler qu'il est effectivement pertinent de faire appel à ces deux équations de Boltzmann couplées ? Comment détermineriez vous les valeurs de τ_{bv}, τ_{vb} et τ_{dir} ?

Annexe

On considère un gaz de sphères dures identiques de masse m, compris entre deux plaques planes parallèles : la *plaque 1* de température T_1 et la *plaque 2* de température T_2. On introduit un repère cartésien $(0, x, y, z)$ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. Le vecteur $\vec{e}_x$ est perpendiculaire aux deux parois. Les vecteurs $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont parallèles à chacune des parois. Dans ce repère, la *plaque 1* est située en $x = 0$ et a un mouvement de translation de vitesse $\vec{V_1} = \alpha \vec{e}_y$; la *plaque 2* est située en $x = E$ et a un mouvement de translation de vitesse $\vec{V_2} = -\alpha \vec{e}_y$ ($E > 0$ et $\alpha > 0$). Le gaz est raréfié et nous pouvons supposer que les collisions entre sphères jouent un rôle négligeable. On admet donc que les sphères n'interagissent qu'avec les plaques. Lorsqu'une sphère rencontre la *plaque 1*, elle est renvoyée dans le volume (quasi-instantanément) avec une distribution de vitesse correspondant à une maxwellienne de vitesse moyenne $\vec{V}_1$ et de température T_1. Il en va de même lors des rencontres avec la seconde plaque, mais la distribution est une maxwellienne de vitesse moyenne $\vec{V}_2$ et de température T_2. On se place en régime stationnaire et on observe que l'écoulement est monodimensionnel : les grandeurs descriptives ne dépendent que de x. On note μ l'intégrale de la masse volumique selon x entre les deux plaques, soit $\mu = \int_0^E \rho(x)dx$. Cette masse surfacique μ est supposée connue (de même que α, E, T_1 et T_2).

On note $p^{eq}(\vec{c}; \vec{V}, T)$ la distribution maxwellienne des vitesses $\vec{c}$ de moyenne $\vec{V}$ et de température T, soit

$$p^{eq}(\vec{c}; \vec{V}, T) = \left(\frac{\frac{1}{2}m}{\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m(\vec{c}-\vec{V})^2}{k_B T}\right)$$

Si $\vec{V}$ est perpendiculaire à $\vec{e}_x$, cette distribution vérifie les propriétés suivantes :

$$\int_{C+} p^{eq}(\vec{c}; \vec{V}, T)\vec{c}d\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{V} + \left(\frac{k_B T}{2\pi m}\right)^{1/2} \vec{e}_x$$

$$\int_{C-} p^{eq}(\vec{c}; \vec{V}, T)\vec{c}d\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{V} - \left(\frac{k_B T}{2\pi m}\right)^{1/2} \vec{e}_x$$

où C^+ est l'espace de toutes les vitesses dont la composante selon $\vec{e}_x$ est positive (l'espace des vitesses sortant de la *plaque 1*) et C^- est son complément à l'ensemble de l'espace des vitesses (c'est à dire l'espace des vitesses sortant de la *plaque 2*).

Dans ces conditions et avec cette propriété, on peut montrer qu'en régime stationnaire le champ de masse volumique et le champ de vitesse sont tous deux homogènes. La masse volumique est

$$\rho_{stat} = \frac{\mu}{E}$$

et la vitesse est

$$\vec{V}_{stat} = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}\alpha\vec{e}_y$$