

La conservation de l'énergie

①

La loi de conservation de l'énergie est un des fondements de la théorie des transferts de chaleur. Dans le contexte de la Thermodynamique, elle est appelée premier principe de la Thermodynamique. Comme toutes les lois de conservation utilisées en Physique, son énoncé est très simple mais sa mise en œuvre nécessite l'introduction des concepts de flux et de densité de flux qui nécessitent un réel effort d'approfondissement. Si vous avez déjà manipulé ces concepts en détail dans d'autres contextes, vous pouvez retenir que la loi de conservation de l'énergie n'a rien de spécifique dans sa mise en œuvre par rapport aux lois de conservation de la masse, de la charge, etc, et vous pouvez lire directement les chapitres suivants. Si au contraire vous n'êtes pas à l'aise avec les concepts de flux et de densité de flux, alors vous pouvez garder en mémoire le fait que le présent chapitre est pensé dans un esprit de formation générale et que'il peut être lu intégralement en remplaçant le mot « énergie » par « masse », « charge » ou n'importe quelle grandeur supposée conservative dans un contexte donné.

On considère un système Ω et on note $E_{\Omega}(t)$ l'énergie de Ω à l'instant t . On note également V le système correspondant à l'ensemble de l'univers et $E_V(t)$ son énergie à l'instant t .

Enfin, on note $\bar{\Omega} = V - \Omega$ le complément de Ω dans l'univers et $E_{\bar{\Omega}}(t)$ son énergie à t . Si on néglige les énergies d'interface, la loi de conservation de l'énergie peut s'énoncer de la façon suivante :

$$E_V(t) = E_{\Omega}(t) + E_{\bar{\Omega}}(t)$$

et

$E_V(t)$ est indépendant de t

La première partie de cet énoncé correspond au caractère additif de l'énergie : l'énergie d'un système est la somme des énergies de ses parties (toujours en négligeant les énergies d'interface). En particulier, $V = \Omega + \bar{\Omega}$ et l'énergie de l'univers est donc la somme de l'énergie de Ω et de l'énergie de son complément. La seconde partie de l'énoncé correspond au fait que l'énergie de l'univers se conserve : si en particulier l'énergie de Ω augmente alors l'énergie de son complément $\bar{\Omega}$ diminue de sorte que

L'énergie de l'univers reste inchangée. Cette dernière image correspond à une façon très utile d'exprimer la loi de conservation de l'énergie :

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) - E_{\mathcal{R}}(t_1) = - \left[E_{\bar{\mathcal{R}}}(t_2) - E_{\bar{\mathcal{R}}}(t_1) \right] \quad (1)$$

Les variations d'énergie de \mathcal{R} et $\bar{\mathcal{R}}$ entre deux instants t_1 et t_2 doivent en effet se compenser exactement pour assurer $E_{\mathcal{U}}(t_2) = E_{\mathcal{U}}(t_1)$ (l'énergie de l'univers est la même à t_1 et à t_2), soit

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) + E_{\bar{\mathcal{R}}}(t_2) = E_{\mathcal{R}}(t_1) + E_{\bar{\mathcal{R}}}(t_1) \quad \text{qui conduit à l'équation (1).}$$

On retient de l'équation (1) qu'il n'y a pas de création d'énergie : toute variation de l'énergie de \mathcal{R} correspond à une quantité d'énergie échangée entre \mathcal{R} et le reste de l'univers. Le système \mathcal{R} peut céder de l'énergie à $\bar{\mathcal{R}}$ ou en recevoir, mais il ne peut pas y avoir de source ni de disparition d'énergie au sein de \mathcal{R} , indépendamment du reste de l'univers, car sinon l'énergie de l'univers tout entier pourrait augmenter ou diminuer. La loi de conservation de l'énergie peut donc se résumer au fait que les variations d'énergie ne

correspondent qu'à des échanges d'énergie entre différentes parties de l'univers.

Echange d'énergie

La notion d'échange d'énergie est toujours au premier plan lors de l'utilisation pratique de la loi de conservation de l'énergie. Avant de passer à la notion de flux, on introduit donc la notation $\chi_{\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2)$ pour la quantité d'énergie échangée par le système \mathcal{R} avec l'ensemble des autres parties de l'univers entre les instants t_1 et t_2 et on réécrit la loi de conservation de l'énergie sous la forme suivante :

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) - E_{\mathcal{R}}(t_1) = \chi_{\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2) \quad (2)$$

Un choix est donc fait en ce qui concerne le signe des énergies échangées par \mathcal{R} avec le reste de l'univers : elles sont comptées positivement lorsqu'il s'agit d'énergies reçues par \mathcal{R} et négativement lorsqu'il s'agit d'énergies cédées par \mathcal{R} au reste de l'univers.

Les conséquences que nous tirerons de la loi de conservation de l'énergie dépendront donc de notre capacité à détailler ces échanges

d'énergie. La démarche que nous retenons ci-après consiste à détailler ces échanges dans le temps, puis à montrer que ces échanges sont localisés à la frontière du domaine étudié, ce qui conduit à la notion de flux. On détaille ensuite ce flux le long de la frontière et on introduit la notion de densité surfacique de flux.

Echanges par unité de temps

→ Si on admet que $E_{\mathcal{R}}(t)$ est une fonction dérivable de t (ce qui induit que $E_{\mathcal{R}}(t)$ est également dérivable), alors on peut détailler les échanges d'énergie au cours du temps en reprenant les développements précédents avec deux instants très proches t et $t + \delta t$ où δt est un intervalle de temps aussi petit que nécessaire. On obtient en particulier :

$$E_{\mathcal{R}}(t + \delta t) - E_{\mathcal{R}}(t) = - [E_{\mathcal{R}}(t + \delta t) - E_{\mathcal{R}}(t)]$$

On peut alors diviser cette équation par δt et prendre la limite lorsque δt tends vers 0 :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{E_{\mathcal{R}}(t + \delta t) - E_{\mathcal{R}}(t)}{\delta t} \right] = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{E_{\mathcal{R}}(t + \delta t) - E_{\mathcal{R}}(t)}{\delta t} \right]$$

Par définition des dérivées des fonctions $E_{\mathcal{R}}$ et $E_{\bar{\mathcal{R}}}$, on obtient

$$E_{\mathcal{R}}'(t) = -E_{\bar{\mathcal{R}}}'(t)$$

et la loi de conservation de l'énergie s'énonce alors en disant que les variations temporelles des énergies de \mathcal{R} et $\bar{\mathcal{R}}$ se compensent exactement de sorte que la variation temporelle de l'énergie de l'univers est nulle. La variation temporelle de l'énergie de \mathcal{R} correspond donc à un échange d'énergie avec le reste de l'univers et on peut noter $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t)$ la quantité d'énergie échangée par unité de temps entre \mathcal{R} et $\bar{\mathcal{R}}$ à l'instant t et notons

$$E_{\mathcal{R}}'(t) = \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t)$$

On intègre alors cette équation entre deux instants t_1 et t_2 pour obtenir

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) - E_{\mathcal{R}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t) dt \quad (3)$$

c'est à dire

$$\mathcal{K}_{\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t) dt$$

→ L'intégrale temporelle qui apparaît dans l'équation (3) signifie

simplement que la variation de l'énergie de Ω résulte de la somme de tous les échanges d'énergie au cours du temps entre t_1 et t_2 .

Bien sûr, dans le cas particulier où la quantité d'énergie échangée par unité de temps est la même à tous les instants,

on a tout simplement $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{S}_{\Omega}(t) dt = (t_2 - t_1) \mathcal{S}_{\Omega}$. Mais ce cas est très particulier et n'appelle rien d'un point de vue intuitif.

Il est donc incontournable de se familiariser complètement avec la forme intégrale de l'équation (3) et d'apprendre à y associer une image intuitive en termes de sommes d'échanges le long de la trajectoire temporelle.

Preons un exemple très simple où le système Ω reçoit une quantité d'énergie par unité de temps constante,

$\mathcal{S}_{\Omega}(t) = +P$ entre t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$ où Δt est un intervalle de

temps donné. Supposons ensuite que Ω perd la même quantité

d'énergie par unité de temps, soit $\mathcal{S}_{\Omega}(t) = -P$, entre t_2 et

$t_3 = t_1 + 2\Delta t$. L'évolution de $\mathcal{S}_{\Omega}(t)$ est représentée sur la figure 1.a.

Alors, l'équation (3) nous permet de déterminer l'évolution temporelle

de l'énergie de Ω , soit $E_{\Omega}(t) = E_{\Omega}(t_1) + \int_{t_1}^t \mathcal{S}_{\Omega}(z) dz$. Cette

énergie augmente linéairement entre t_1 et t_2 , soit $E_{\mathcal{R}}(t) = E_{\mathcal{R}}(t_1) + (t-t_1)P$

pour $t \in [t_1, t_2]$, puis décroît linéairement entre t_2 et t_3 , soit

$E_{\mathcal{R}}(t) = E_{\mathcal{R}}(t_2) - (t-t_2)P$ pour $t \in [t_2, t_3]$. L'évolution de $E_{\mathcal{R}}(t)$ est représentée sur la figure 1.b. Dans cet exemple $E_{\mathcal{R}}(t_3) = E_{\mathcal{R}}(t_1)$.

L'énergie de \mathcal{R} est donc la même à l'instant t_3 qu'à l'instant t_1 ,

alors que des échanges d'énergie non nulle ont lieu entre \mathcal{R} et le reste de l'univers entre ces deux instants. Cela signifie simplement

que dans ce cas particulier l'ensemble des échanges d'énergie ayant

lieu entre t_1 et t_3 a une somme nulle, soit $\chi_{\mathcal{R}}(t_1 \rightarrow t_3) = \int_{t_1}^{t_3} \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t) dt = 0$.

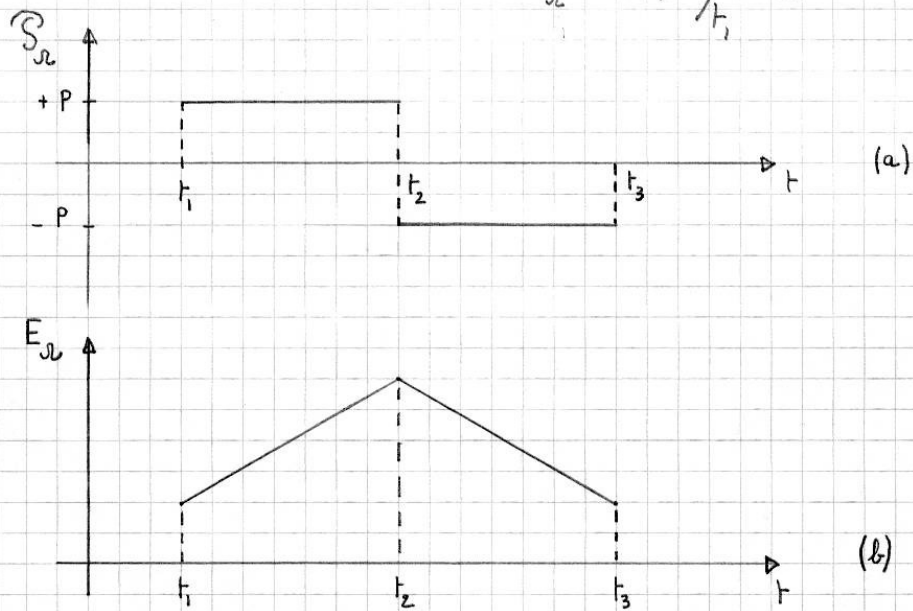


Figure 1 : (a) Exemple d'évolution temporelle de la quantité d'énergie échangée par unité de temps. (b) Evolution correspondante de l'énergie du système.

On peut remarquer dans cet exemple que $E_R(t)$ n'est pas dérivable en t_2 . La dérivabilité de E_R était pourtant notre point de départ lorsque nous avons introduit la notion d'échange par unité de temps. Sans le démontrer, nous admettons ici que l'hypothèse nécessaire est en fait que $E_R(t)$ est continue (ce qui est le cas en t_2 dans notre exemple) et qu'elle est dérivable par intervalle (elle est effectivement dérivable sur $]t_1, t_2[$ et dérivable sur $]t_2, t_3[$, même si elle est non dérivable en t_2).

Preons rapidement un second exemple où la quantité d'énergie échangée par unité de temps est nulle en t_1 et augmente linéairement entre t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$, soit $\mathcal{P}_R(t) = \alpha(t - t_1)$ où α est une constante positive. Elle diminue ensuite linéairement jusqu'à la valeur zero en $t_3 = t_1 + 2\Delta t$, soit $\mathcal{P}_R(t) = \alpha(t_3 - t)$. En appliquant l'équation (3), on obtient les expressions suivantes pour l'évolution temporelle de l'énergie de R : $E_R(t) = E_R(t_1) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_1)^2$ pour $t \in [t_1, t_2]$ et $E_R(t) = E_R(t_1) + \alpha[\Delta t^2 - \frac{1}{2}(t - t_3)^2]$. Ces évolutions temporelles sont représentées sur la figure 2. Comme les énergies

échangées par unité de temps sont ici toujours positives, l'énergie de \mathcal{R} est croissante à tous les instants sur l'intervalle étudié.

Cependant, elle n'augmente pas de la même façon à tous les instants (elle n'est pas une fonction linéaire) : elle augmente lentement là où l'énergie échangée par unité de temps est faible et elle augmente rapidement là où l'énergie échangée par unité de temps est forte.

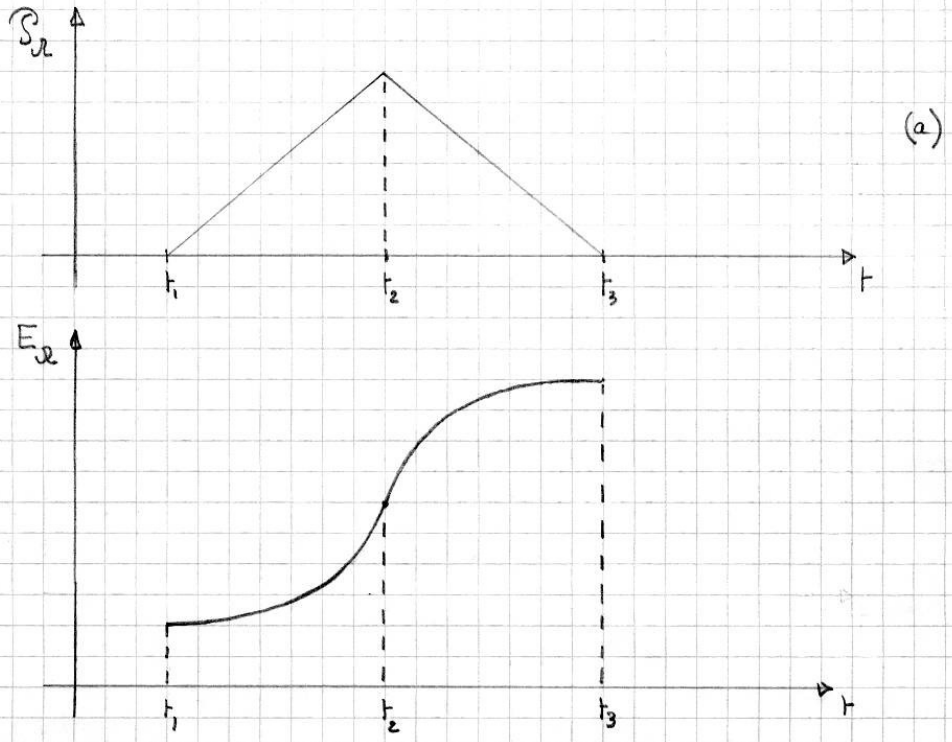


Figure 2 : (a) Exemple d'évolution temporelle de la quantité d'énergie échangée par unité de temps. (b) Evolution correspondante de l'énergie du système.

Nous venons de détailler les échanges d'énergie au cours du temps. Pour aller plus loin dans l'utilisation pratique de la loi de conservation de l'énergie, nous allons détailler géométriquement ces échanges, c'est à dire préciser les points de l'espace où ces échanges ont lieu.

A chaque instant t , nous allons donc écrire $\mathcal{S}_R(t)$ comme la somme des énergies échangées en chacun de ces points, c'est à dire comme une intégrale spatiale.

$\mathcal{S}_R(t)$ est l'ensemble des énergies échangées par unité de temps entre \mathcal{R} et $\bar{\mathcal{R}}$. On pourrait donc penser que pour détailler géométriquement $\mathcal{S}_R(t)$ il nous faut passer en revue l'ensemble des points A de \mathcal{R} , ainsi que l'ensemble des points B de $\bar{\mathcal{R}}$ et regarder l'énergie échangée entre A et B par unité de temps.

Cependant, on peut montrer que l'énergie échangée par unité de temps entre deux points A et B est rigoureusement nulle si A et B sont séparés d'une distance non nulle. La raison est la suivante (nous l'admettons sans chercher à la démontrer): aucune quantité d'énergie ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière. Tout se passe donc

avec endroits de l'espace où l'on peut définir des points de Ω et de $\bar{\Omega}$ séparés d'une distance nulle, c'est à dire à la frontière entre Ω et $\bar{\Omega}$ (voir la figure 3). Comme $\bar{\Omega}$ est le complément de Ω dans l'univers, la frontière entre Ω et $\bar{\Omega}$ est simplement la surface extérieure de Ω que nous noterons Σ . Chaque point Q de Σ est un point de contact entre Ω et $\bar{\Omega}$ et est donc un lieu où de l'énergie peut être échangée par unité de temps entre Ω et $\bar{\Omega}$. Cet échange d'énergie correspond à de l'énergie ayant traversé Σ dans un sens ou dans l'autre.

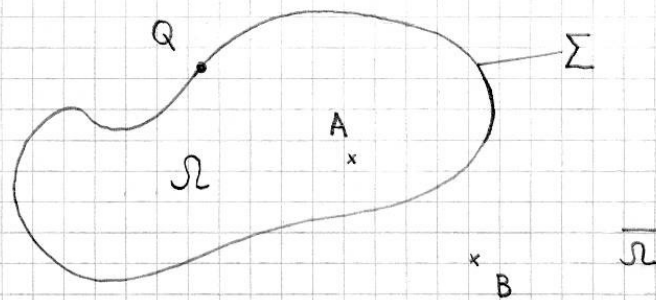


Figure 3 : Le système Ω a une enveloppe Σ et on note $\bar{\Omega}$ l'ensemble du reste de l'univers. Si $A \in \Omega$ et $B \in \bar{\Omega}$ sont séparés d'une distance d non nulle et si la quantité d'énergie échangée entre A et B à l'instant t (par unité de temps) est non nulle alors de l'énergie se propage à vitesse infinie sur une distance d non nulle, ce que nous admettons comme impossible. Les échanges ont donc lieu à la frontière.

Ces raisonnements nous conduisent donc à interpréter $\mathcal{P}_\Sigma(t)$ comme une quantité d'énergie traversant Σ par unité de temps.

Une quantité d'énergie traversant une surface S par unité de temps à l'instant t est appelé flux d'énergie à travers S à t .

Nous noterons ce flux $\phi_S(t)$. Avec cette notation nous pouvons donc écrire $\mathcal{P}_\Sigma(t) = \phi_\Sigma(t)$ et retenir la loi de conservation de l'énergie sous la forme suivante :

$$E_{\mathcal{V}}(t_2) - E_{\mathcal{V}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \phi_\Sigma(t) dt \quad (4)$$

Bien sûr, comme pour la définition de $\mathcal{P}_\Sigma(t)$ et de $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}(t_1 \rightarrow t_2)$, la définition d'un flux nécessite une convention de signe. Ici, pour que l'équation (4) soit valable, il faut que le flux d'énergie à travers Σ soit positif si les échanges d'énergie entre \mathcal{V} et $\bar{\mathcal{V}}$ à travers Σ se traduisent par un gain d'énergie pour \mathcal{V} .

De façon générale, pour une surface S quelconque il sera toujours nécessaire de préciser la convention de signe utilisée au moment de faire appel au flux d'énergie à travers S . La notation $\phi_S(t)$ n'indique en elle-même aucun choix d'orientation et

ce n'est que par la rédaction accompagnant les développements formels que nous pourrions préciser la convention de signe que nous choisissons d'utiliser.

Exemple

→ Prenons un exemple simple où nous considérons deux systèmes \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 d'enveloppes respectives Σ_1 et Σ_2 . Supposons que ces deux systèmes sont en contact et notons S_c la surface de contact correspondante. On définit ensuite S_1 comme le complément à S_c dans Σ_1 , c'est à dire $S_1 = \Sigma_1 - S_c$. On définit de même $S_2 = \Sigma_2 - S_c$ (voir la figure 4). Si nous voulons rester dans la logique des raisonnements précédents, lors de la définition du flux d'énergie à travers S_1 à t , soit $\phi_{S_1}(t)$, nous allons choisir de compter positivement les énergies entrant dans \mathcal{R}_1 à travers S_1 et négativement celles sortant de \mathcal{R}_1 . On fera de même pour $\phi_{S_2}(t)$: on choisira une orientation vers \mathcal{R}_2 . Mais pour la partie commune des enveloppes de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , c'est à dire pour S_c , nous devons faire un choix totalement arbitraire. Si nous choisissons de compter positivement les énergies entrant dans \mathcal{R}_1 lors de

la définition du flux $\phi_{S_c}(t)$, alors nous n'aurons pas de difficulté de signe lors de l'écriture de la loi de conservation de l'énergie appliquée à \mathcal{R}_1 . Comme l'enveloppe Σ_1 se décompose en $\Sigma_1 = S_1 \cup S_c$, le flux d'énergie à travers Σ_1 sera la somme des flux d'énergie à travers S_1 et à travers S_c , soit

$$\phi_{\Sigma_1}(t) = \phi_{S_1}(t) + \phi_{S_c}(t) \quad \text{et on écrit}$$

$$E_{\mathcal{R}_1}(t_2) - E_{\mathcal{R}_1}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [\phi_{S_1}(t) + \phi_{S_c}(t)] dt$$

Mais en faisant ce choix d'orientation lors de la définition de $\phi_{S_c}(t)$ les énergies entrant dans \mathcal{R}_2 à travers S_c sont comptées négativement (puisque ce sont des énergies sortant de \mathcal{R}_1). On devra donc utiliser un signe moins lors de l'écriture du flux d'énergie à travers

$$\Sigma_2 = S_2 \cup S_c \quad \text{et écrire} \quad \phi_{\Sigma_2}(t) = \phi_{S_2}(t) - \phi_{S_c}(t) \quad \text{et donc}$$

$$E_{\mathcal{R}_2}(t_2) - E_{\mathcal{R}_2}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [\phi_{S_2}(t) - \phi_{S_c}(t)] dt$$

On voit à travers cet exemple que dès qu'une surface sert à délimiter deux systèmes le choix d'orientation est nécessairement arbitraire et induit des difficultés dans la gestion des signes.

densité surfacique de flux

Reprenons le système \mathcal{R} de frontière Σ que nous avons introduit au début de ce chapitre. Nous avons vu que pour mettre en œuvre utilement la loi de conservation de l'énergie appliquée à \mathcal{R} , il nous faut détailler les échanges d'énergie entre \mathcal{R} et le reste de l'univers. Pour aboutir à l'équation (4) nous avons d'abord détaillé ces échanges au cours du temps, ce qui a fait apparaître une intégrale temporelle, puis nous avons admis que l'énergie ne pouvait pas se propager à une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière, ce qui nous permis de localiser les échanges d'énergie par unité de temps au niveau de la frontière et d'introduire la notion de flux. Si nous voulons aller plus loin il nous faut maintenant détailler ce flux en examinant les échanges d'énergie ayant lieu en chacun des points de la frontière.

Supposons tout d'abord que Σ peut se décomposer en n surfaces adjacentes notées S_i pour $i \in \langle 1, n \rangle$ (voir la figure 5). Alors comme $\Sigma = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_n$ et comme il n'y a pas de recouvrement entre les différentes surfaces, le flux d'énergie à travers Σ est la somme des flux d'énergie

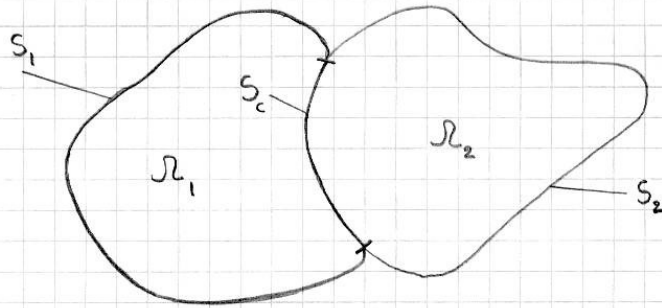


Figure 4 : Deux systèmes Ω_1 et Ω_2 de frontières respectives Σ_1 et Σ_2 . La frontière Σ_1 se décompose en $\Sigma_1 = S_1 \cup S_c$ où S_c est la surface de contact et S_1 est la partie de Σ_1 qui n'est pas en contact avec Ω_2 . De même Σ_2 se décompose en $\Sigma_2 = S_2 \cup S_c$.

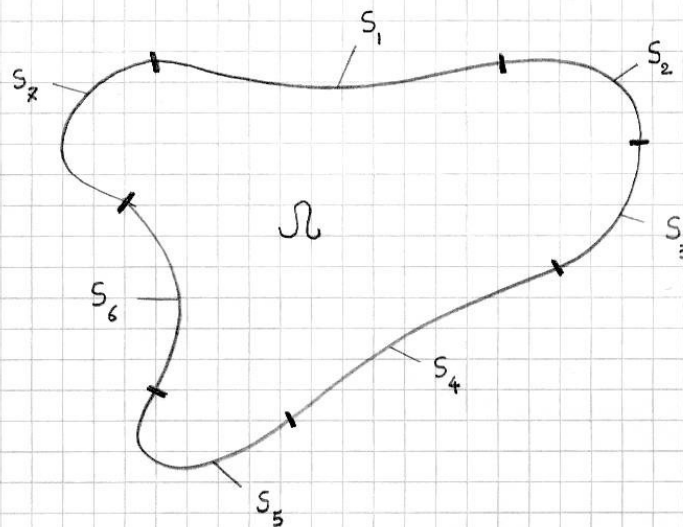


Figure 5 : Exemple de décomposition de la surface Σ en n surfaces adjacentes S_i (aucun recouvrement entre les surfaces prises deux à deux). $\Sigma = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_n$ et $\phi_\Sigma(t) = \phi_{S_1}(t) + \phi_{S_2}(t) + \dots + \phi_{S_n}(t)$.

à travers chacune des surfaces S_i . Si on prend pour $\phi_{S_i}(t)$ la même convention de signe que pour $\phi_{\Sigma}(t)$, c'est à dire que les échanges d'énergie sont comptés positivement lorsqu'il s'agit d'un apport d'énergie pour \mathcal{R} , alors on peut écrire $\phi_{\Sigma}(t) = \phi_{S_1}(t) + \dots + \phi_{S_m}(t)$.
 et l'équation (4) devient

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) - E_{\mathcal{R}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [\phi_{S_1}(t) + \phi_{S_2}(t) + \dots + \phi_{S_m}(t)] dt \quad (5)$$

Il s'agit simplement d'une généralisation de ce que nous avons écrit pour \mathcal{R} , dans l'exemple précédent et cela permet de détailler les transferts d'énergie à travers Σ en étudiant séparément les flux à travers des parties de Σ en aussi grand nombre que nécessaire.

C'est très souvent sous cette forme que nous ferons appel à la loi de conservation de l'énergie lors de l'étude thermique de systèmes complexes. Le découpage de la frontière en sous-surfaces se fait alors à partir de critères géométrique ou en fonction des modes de transfert thermique en présence (conduction, convection et/ou rayonnement). Cependant nous avons également besoin d'une version continue de la description surfacique. Pour cela, il suffit de penser

plus loin le raisonnement précédent en découpant Σ en une infinité de surfaces élémentaires $dS(Q)$ autour de chaque point Q de la frontière de Ω . Le flux d'énergie à travers Σ s'écrit alors comme la somme des flux d'énergie à travers chaque surface élémentaire, c'est à dire comme une intégrale surfacique. On écrit

$$\Phi_{\Sigma}(t) = \int_{\Sigma} \Psi_{\Sigma}(Q, t) dS(Q)$$

où $\Psi_{\Sigma}(Q, t)$ est le flux d'énergie traversant Σ au point Q , par unité de surface autour de Q , à l'instant t . $\Psi_{\Sigma}(Q, t)$ est appelé densité surfacique de flux à travers Σ , en Q , à t . Comme en

ce qui concerne les flux, l'utilisation d'une densité surfacique de flux nécessite de choisir une convention de signe. Ici, $\Psi_{\Sigma}(Q, t)$

est positif si de l'énergie rentre dans Ω à travers Σ en Q , négatif si au contraire Ω perd de l'énergie à travers Σ en Q . Avec

cette écriture intégrale du flux on a entièrement détaillé géométriquement

les échanges d'énergie entre Ω et le reste de l'univers. La loi de

conservation de l'énergie s'écrit alors à l'aide d'une double intégrale,

une intégrale sur le temps (pour sommer toutes les énergies échangées à

chaque instant t de l'intervalle d'étude) et une intégrale surfacique (pour sommer, à chaque instant t , toutes les énergies échangées par unité de temps à travers Σ en chaque point Q de Σ) :

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) - E_{\mathcal{R}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Sigma} \Psi_{\Sigma}(Q, t) dS(Q) \right] dt$$

On préfère souvent reporter les différentielles $dS(Q)$ et dt directement à la suite de leurs intégrales respectives ce qui permet d'alléger la notation en supprimant les crochets :

$$E_{\mathcal{R}}(t_2) - E_{\mathcal{R}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} dS(Q) \Psi_{\Sigma}(Q, t) \quad (6)$$

Exemple

Preons un exemple où \mathcal{R} est un cube de côté a et admettons qu'entre t_1 et t_2 la densité surfacique de flux est uniforme (indépendante de Q) et constante (indépendante de t) et prend la valeur $\Psi_{\Sigma}(Q, t) = \frac{P}{6a^2}$ où P est une constante. Alors $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t) = \Phi_{\Sigma}(t) = \int_{\Sigma} \Psi_{\Sigma}(Q, t) dS(Q)$ prend la valeur $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t) = \int_{\Sigma} \frac{P}{6a^2} dS(Q) = P$ car la surface des six faces du cube est $6a^2$. On est donc ramené à l'exemple de la figure 1 sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. Et effectivement, en utilisant l'équation 6 entre t_1 et $t \in [t_1, t_2]$, on retrouve bien le même résultat que

précédemment :

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}(t) &= E_{\Sigma}(t_1) + \int_{t_1}^t dt \int_{\Sigma} dS(\mathcal{Q}) \frac{P}{6a^2} \\ &= E_{\Sigma}(t_1) + \int_{t_1}^t dt P \\ &= E_{\Sigma}(t) + (t-t_1)P \end{aligned}$$

Pour continuer sur cet exemple, on peut maintenant supposer que sur l'intervalle de temps $[t_2, t_3]$ la densité surfacique de flux reste inchangée sur cinq des six faces, soit $\varphi_{\Sigma}(\mathcal{Q}, t) = \frac{P}{6a^2}$, mais que sur la sixième face la densité surfacique de flux devient négative à la valeur $\varphi_{\Sigma}(\mathcal{Q}, t) = -\frac{11P}{6a^2}$. Alors le flux $\Phi_{\Sigma}(t) = \int_{\Sigma} \varphi_{\Sigma}(t) dS$ prend la valeur $\Phi_{\Sigma}(t) = 5a^2 \frac{P}{6a^2} + a^2 \left(-\frac{11P}{6a^2}\right) = -P$ et on est ramené à l'exemple de la figure 1 sur l'intervalle de temps $[t_2, t_3]$. Bien sûr, l'application de l'équation 6 entre t_2 et $t \in [t_2, t_3]$ conduit à

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}(t) &= E_{\Sigma}(t_2) + \int_{t_2}^t dt \int_{\Sigma} dS(\mathcal{Q}) \varphi_{\Sigma}(\mathcal{Q}, t) \\ &= E_{\Sigma}(t_2) + \int_{t_2}^t dt \left[5a^2 \frac{P}{6a^2} + a^2 \left(-\frac{11P}{6a^2}\right) \right] \\ &= E_{\Sigma}(t_2) - (t-t_2)P \end{aligned}$$

ce qui, en remplaçant $E_{\Sigma}(t_2)$ par sa valeur, conduit au même résultat que précédemment. On peut remarquer sur cet exemple que $\phi_{\Sigma}(t) = -P$ est négatif sur $[t_2, t_3]$, c'est à dire que Ω perd de l'énergie à travers Σ . Pourtant, sur cinq faces la densité surfacique de flux d'énergie $\Psi_{\Sigma}(\alpha, t) = \frac{P}{6a^2}$ est positive. Cela signifie simplement que les pertes à travers la sixième face l'emportent sur les gains à travers les cinq autres. C'est le pendant géométrique de ce que nous avons vu en termes temporels dans les exemples des figures 1 et 2. Les densités surfaciques de flux peuvent être positives en certains points, négatives en d'autres. Elles peuvent être positives à certains instants, négatives à d'autres. Ce qui compte en termes d'évolution énergétique du système Ω c'est la somme de toutes ces entrées et sorties d'énergie en tous les points de la frontière et à tous les instants. On peut dans cet esprit se constituer assez facilement une image intuitive associée à l'intégrale double de l'équation 6.

→ Pour un premier niveau d'utilisation pratique des lois de conservation, en particulier de la loi de conservation de l'énergie, il nous reste à introduire la notion de vecteur densité surfacique de flux, en Q , à t . Il s'agit d'un champ de vecteur que nous noterons $\vec{j}(Q, t)$ et qui peut être défini dès lors que l'on suppose que l'énergie est distribuée continuellement dans l'espace, ou plus précisément si la densité volumique d'énergie n'est infinie en aucun point de l'espace. (On rappelle que nous avons déjà supposé que pour tout système Ω , l'énergie $E_{\Omega}(t)$ est une fonction continue du temps.) Le vecteur $\vec{j}(Q, t)$ est utilisé pour écrire la densité surfacique de flux à travers Σ en Q de la façon suivante :

$$\Psi_{\Sigma}(Q, t) = \vec{j}(Q, t) \cdot \vec{m}_{\Sigma}(Q) \quad (7)$$

où $\vec{m}_{\Sigma}(Q)$ est le vecteur unitaire normal à Σ en Q , orienté vers l'intérieur (c'est à dire vers le système Ω). La loi de conservation de l'énergie peut alors s'écrire (à partir de l'équation 6)

$$E_{\Omega}(t_2) - E_{\Omega}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} dS(Q) \vec{j}(Q, t) \cdot \vec{m}_{\Sigma}(Q) \quad (8)$$

et nous verrons que la physique des transferts d'énergie a essentiellement

pour objet de proposer des modèles de ce champ de vecteur $\vec{j}(Q,t)$ pour les différents modes de transfert d'énergie (conduction, convection et rayonnement).

Pour définir le vecteur densité surfacique de flux au point Q , nous commençons par nous donner un repère orthonormé centré en Q , que nous notons $(Q, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$. Le plan perpendiculaire à \vec{i}_1 passant par Q est noté π_1 et on compte positivement les flux traversant π_1 dans le sens de \vec{i}_1 . On note de même π_2 et π_3 les plans perpendiculaires à \vec{i}_2 et \vec{i}_3 avec la même convention d'orientation. On définit alors $\vec{j}(Q,t)$ à partir des densités surfaciques de flux à travers π_1, π_2 et π_3 :

$$\vec{j}(Q,t) = \varphi_{\pi_1}(Q,t) \vec{i}_1 + \varphi_{\pi_2}(Q,t) \vec{i}_2 + \varphi_{\pi_3}(Q,t) \vec{i}_3 \quad (9)$$

Avec cette définition, il est évident que l'équation 7 est vérifiée dans les cas particuliers $\Sigma \equiv \pi_1$, $\Sigma \equiv \pi_2$ et $\Sigma \equiv \pi_3$, mais il nous reste à démontrer que l'équation 7 est vérifiée pour une surface Σ quelconque, ce qui est vrai dès lors que la densité volumique d'énergie n'est infinie en aucun point.

Démonstration : Pour ne pas être gênés par les conventions de

signe, nous allons nous restreindre au cas où les coordonnées du vecteur \vec{m}_Σ dans le repère $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ sont toutes positives,

soit $\vec{m}_\Sigma(Q) = m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3$ avec $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ et

$m_3 > 0$ (Les autres cas de figure se traitent très simplement de façon similaire). Avec cette restriction, on définit les trois

scalaires positifs suivant $\beta_1 = \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1}}$, $\beta_2 = \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_2}}$ et $\beta_3 = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_3}}$

qui permettent de définir le plan Π_E passant par les trois

points Q_1, Q_2 et Q_3 de coordonnées respectives $(\beta_1 \varepsilon, 0, 0)$,

$(0, \beta_2 \varepsilon, 0)$ et $(0, 0, \beta_3 \varepsilon)$ dans le repère $(Q, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

On note Ω_ε le système délimité par les quatre plans Π_1, Π_2, Π_3

et Π_E comme indiqué sur la figure 6.

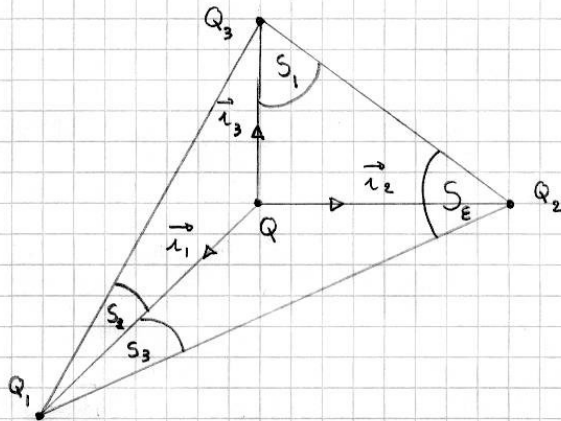


Figure 6 : Définition du système Ω_ε de frontière S_1, S_2, S_3, S_E

Ω_ε est une pyramide et on note S_1, S_2, S_3 et S_ε les surfaces des quatre triangles la délimitant, parallèles à Π_1, Π_2, Π_3 et Π_ε respectivement.

Ces surfaces vérifient $S_1 = \frac{1}{2} \beta_2 \beta_3 \varepsilon^2$, $S_2 = \frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \varepsilon^2$, $S_3 = \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \varepsilon^2$ et

$$S_\varepsilon = \frac{1}{2} \|\vec{Q_1 Q_2} \wedge \vec{Q_1 Q_3}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(\beta_2 \beta_3)^2 + (\beta_1 \beta_3)^2 + (\beta_1 \beta_2)^2} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

De plus, le vecteur unitaire normal à Π_ε , sortant de la pyramide

$$\text{est } \vec{m}_\varepsilon = \frac{\vec{Q_1 Q_2} \wedge \vec{Q_1 Q_3}}{\|\vec{Q_1 Q_2} \wedge \vec{Q_1 Q_3}\|} = \frac{\beta_2 \beta_3 \vec{e}_1 + \beta_1 \beta_3 \vec{e}_2 + \beta_1 \beta_2 \vec{e}_3}{\sqrt{(\beta_2 \beta_3)^2 + (\beta_1 \beta_3)^2 + (\beta_1 \beta_2)^2}} = m_1 \vec{e}_1 + m_2 \vec{e}_2 + m_3 \vec{e}_3 = \vec{m}_\Sigma(Q)$$

Le plan Π_ε est donc perpendiculaire à $\vec{m}_\Sigma(Q)$ et en faisant tendre ε

vers zéro, le plan Π_ε se rapproche du point Q et tend vers le plan

tangent à Σ en Q . Si Q_ε est un point quelconque du triangle

(Q_1, Q_2, Q_3) , par exemple le barycentre, alors la densité surfacique

de flux à havers Π_ε en Q_ε tend vers la densité surfacique

de flux à havers Σ en Q :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\Pi_\varepsilon}(Q_\varepsilon, t) = \varphi_\Sigma(Q, t) \quad (10)$$

Pour démontrer que l'équation (10) est vérifiée, il est donc

suffisant de démontrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\Pi_\varepsilon}(Q_\varepsilon, t) = \vec{f}(Q, t) \cdot \vec{m}_\Sigma(Q)$

Pour cela, on applique la loi de conservation de l'énergie à la

pyramide Ω_ε .

$$E_{\Omega_\varepsilon}(t_2) - E_{\Omega_\varepsilon}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [\phi_{S_1}(t) + \phi_{S_2}(t) + \phi_{S_3}(t) + \phi_{S_\varepsilon}(t)] dt \quad (10)$$

où les flux sont positifs lorsque il s'agit d'énergie reçue par Ω_ε . Avec cette convention, pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_{S_i}(t)}{S_i} = \Psi_{\Pi_i}(Q, t)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_{S_\varepsilon}(t)}{S_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\Psi_{\Pi_\varepsilon}(Q_\varepsilon, t) \right) = -\Psi_\Sigma(Q, t)$$

On peut alors utiliser les expressions précédentes des surfaces S_1, S_2, S_3 et S_ε , diviser les deux membres de l'équation 10 par ε^2 et prendre la limite en zéro

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} E_{\Omega_\varepsilon}(t_2) \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} E_{\Omega_\varepsilon}(t_1) \right) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \Psi_{\Pi_1}(Q, t) + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \Psi_{\Pi_2}(Q, t) + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \Psi_{\Pi_3}(Q, t) - \frac{1}{2} \Psi_\Sigma(Q, t) \right] dt \quad (11)$$

En notant $e(P, t)$ la densité volumique d'énergie en un point quelconque P de Ω_ε , si la densité d'énergie est bornée par une valeur e_{max} , alors $E_{\Omega_\varepsilon}(t)$ peut être majorée de la façon suivante, en utilisant l'expression

$V_\varepsilon = \frac{1}{6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \varepsilon^3$ du volume de la pyramide :

$$E_{\Omega_\varepsilon}(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} e(P, t) dV(P) < e_{max} \frac{1}{6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \varepsilon^3$$

Donc, sous cette hypothèse d'une densité volumique d'énergie bornée,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\mathcal{J}_\varepsilon}(t) \right) = 0$$

et l'équation 11 devient

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \beta_2 \beta_3 \Psi_{\Pi_1}(q,t) + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \Psi_{\Pi_2}(q,t) + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \Psi_{\Pi_3}(q,t) - \frac{1}{2} \Psi_{\Sigma}(q,t) \right] dt = 0$$

Si les densités surfaciques de flux sont bornées également (voir le lien avec l'hypothèse précédente), alors cette équation intégrale, qui doit être vérifiée pour tout interval de temps $[t_1, t_2]$, impose qu'à tout instant t

$$\frac{1}{2} \beta_2 \beta_3 \Psi_{\Pi_1}(q,t) + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \Psi_{\Pi_2}(q,t) + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \Psi_{\Pi_3}(q,t) - \frac{1}{2} \Psi_{\Sigma}(q,t) = 0$$

soit

$$\Psi_{\Sigma}(q,t) = \beta_2 \beta_3 \Psi_{\Pi_1}(q,t) + \beta_1 \beta_3 \Psi_{\Pi_2}(q,t) + \beta_1 \beta_2 \Psi_{\Pi_3}(q,t)$$

$$\Psi_{\Sigma}(q,t) = m_1 \Psi_{\Pi_1}(q,t) + m_2 \Psi_{\Pi_2}(q,t) + m_3 \Psi_{\Pi_3}(q,t)$$

c'est à dire

$$\Psi_{\Sigma}(q,t) = \vec{f}(q,t) \cdot \vec{m}_{\Sigma}(q)$$

avec

$$\vec{f}(q,t) = \Psi_{\Pi_1}(q,t) \vec{x}_1 + \Psi_{\Pi_2}(q,t) \vec{x}_2 + \Psi_{\Pi_3}(q,t) \vec{x}_3$$

L'équation 7 est donc bien vérifiée.