

Etude des transferts thermiques : la première étape est le choix d'un système Ω (ou de plusieurs systèmes), notamment la définition de sa frontière Σ .

1^{er} principe de la thermodynamique : l'énergie se conserve dans l'univers donc l'évolution de l'énergie de Ω , soit $\frac{dE_{\Omega}}{dt}$, est égale à l'opposé de l'évolution de l'énergie de $\bar{\Omega}$ (le complément de Ω dans l'univers), soit

$$\frac{dE_{\Omega}}{dt} - \frac{dE_{\bar{\Omega}}}{dt} + \text{vitesse limite de propagation} \Rightarrow \frac{dE_{\Omega}}{dt} = \phi_{\Sigma}$$

où ϕ_{Σ} est le flux net d'énergie à travers la frontière avec un choix d'orientation vers l'intérieur.

Les trois modes de transfert thermique : rayonnement (transfert d'énergie associé à la propagation des ondes électromagnétiques, qui peut avoir lieu dans des milieux matériels mais aussi dans le vide - autre point de vue possible : émission, transport et absorption de photons); conduction (transfert d'énergie associé à l'agitation moléculaire, sans tenir compte d'un éventuel déplacement d'ensemble de la matière - on parle aussi de diffusion thermique); convection (transfert d'énergie au sein d'un écoulement correspondant à la conduction + l'advection, c'est à dire associé à la fois à l'agitation moléculaire et au déplacement d'ensemble [macroscopique] de la matière).

$$\Rightarrow \text{Sans écoulement: } \phi_{\Sigma} = \phi_{\Sigma, \text{ray}} + \phi_{\Sigma, \text{cond}}$$

$$\text{Avec écoulement: } \phi_{\Sigma} = \phi_{\Sigma, \text{ray}} + \phi_{\Sigma, \text{conv}}$$

Densité surfacique de flux $\varphi_{\Sigma}(P)$
 grandeur scalaire associée à la frontière

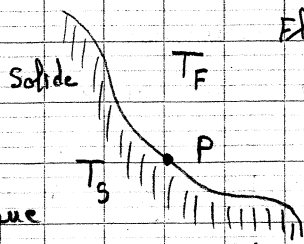
$$\phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \varphi_{\Sigma}(P) dS(P)$$

Vecteur densité surfacique de flux
 grandeur vectorielle définie en tout point de champ, indépendamment de la frontière

$$\varphi_{\Sigma}(P) = \vec{j}(P) \cdot \vec{m}_{\Sigma}(P)$$

$$\phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{j}(P) \cdot \vec{m}_{\Sigma}(P) dS(P)$$

Convection



Fluide quasi-isotherme
(sauf dans la couche limite)

On admet souvent que la densité surfacique de flux convectif en P est proportionnelle à l'écart $T_s - T_f$

$$\boxed{\varphi(P) = h (T_s - T_f)}$$

pour une orientation du solide vers le fluide

Le coefficient de proportionnalité h est le coefficient d'échange convectif

Conduction

Loi de Fourier

$$\vec{j} = -\lambda \text{grad}(T)$$

où λ est la conductivité thermique (propriété du matériau)

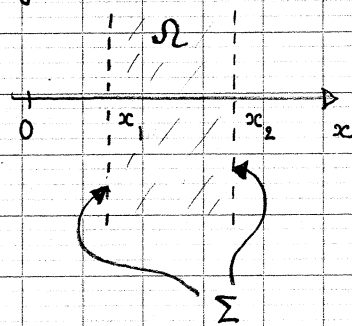
→ vide : $\lambda = 0$ W/mk

isolants : $\lambda \sim 10^{-2}$ à 10^{-1} W/mk

métaux : $\lambda \sim 10$ à 100 W/mk

En géométrie monodimensionnelle $\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ en cartésien ;
 $\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ en cylindrique et en sphérique (orientation dans le sens de x ou r croissant).

En géométrie monodimensionnelle et en régime stationnaire :



• En cartésien, on choisit de considérer le système défini par $x \in [x_1, x_2]$, dont la frontière Σ est l'union des deux surfaces Σ_1 et Σ_2 correspondant respectivement à $x = x_1$ et à $x = x_2$.

La conservation de l'énergie impose $\frac{dE_\Omega}{dt} = \phi_\Sigma$ avec $\phi_\Sigma = \int_\Sigma \varphi_\Sigma dS$ où la densité surfacique de flux est définie avec un choix d'orientation vers l'intérieur du système

Cela impose $\varphi_{\Sigma_2} = -\varphi_{\Sigma_1}$. Si on définit $\varphi(x)$ comme précédemment, avec une orientation dans le sens des x croissants alors $\varphi(x_2) = -\varphi_{\Sigma_2}$ et $\varphi(x_1) = +\varphi_{\Sigma_1}$.

donc la conservation de l'énergie s'écrit $\boxed{\varphi(x_2) = \varphi(x_1)}$

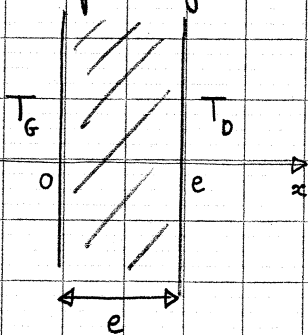
→ Au stationnaire, si il entre de l'énergie dans Ω à travers Σ_1 (c'est à dire si $\varphi(x_1) > 0$), alors exactement la même quantité d'énergie doit sortir de Ω à travers Σ_2 (c'est à dire $\varphi_{\Sigma_2} = -\varphi_{\Sigma_1} < 0$ ce qui donne bien $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$)

→ Remarque : A ce stade rien n'est spécifiquement lié à la conduction. $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$ resterait valable si d'autres mécanismes de transfert étaient en présence (par ex. en présence de rayonnement avec $\varphi(x) = \varphi_{\text{cond}}(x) + \varphi_{\text{ray}}(x)$).

On retient que φ est indépendant de x et donc, en conduction pure : $\boxed{\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \text{ est indépendant de } x}$

Si, de plus, le matériau est homogène (λ est indépendant de x) alors $\frac{\partial T}{\partial x}$ est indépendant de x → Le profil de température est linéaire

Application : une plaque plane homogène avec une température T_G sur sa face gauche et une température T_D sur sa face droite

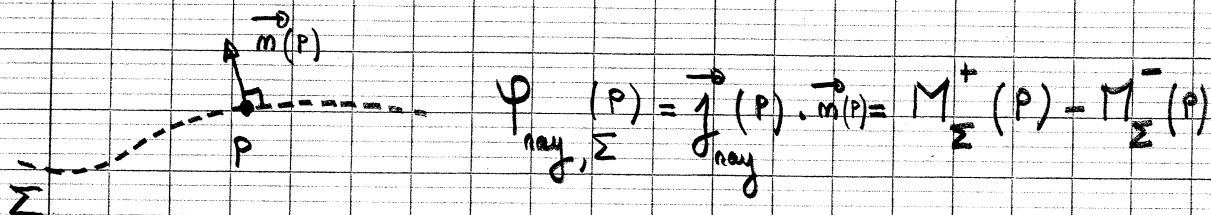


$$T(x) = T_G + \frac{x}{e}(T_D - T_G)$$

$$\boxed{\varphi(x) = -\lambda \frac{(T_D - T_G)}{e}}$$

• En cylindrique Ω défini par $r \in [r_1, r_2]$ et $\phi_{\Sigma} = 0 \Rightarrow 2\pi r_1 \varphi(r_1) = 2\pi r_2 \varphi(r_2)$
donc $\boxed{r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \text{ est indépendant de } r}$ et en homogène $r \frac{\partial T}{\partial r}$ indép. de r

• En sphérique $4\pi r_1^2 \varphi(r_1) = 4\pi r_2^2 \varphi(r_2)$
donc $\boxed{r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \text{ est indépendant de } r}$ et en homogène $r^2 \frac{\partial T}{\partial r}$ indép. de r



- L'émittance $M_{\Sigma}^{+}(P)$ est la densité surfacique de flux à travers Σ en P correspondant aux photons traversant Σ dans le sens de la normale $\vec{m}(P)$, i.e. ceux dont la direction de propagation est dans l'hémisphère centrée sur $\vec{m}(P)$.

L'émittance $M_{\Sigma}^{+}(P)$ est la somme des émittances monochromatiques

$$M_{\Sigma}^{+}(P) = \int_0^{+\infty} M_{\Sigma, \nu}^{+}(P) d\nu = \int_0^{+\infty} \pi_{\Sigma, \lambda}^{+}(P) d\lambda = \int_0^{+\infty} \pi_{\Sigma, \eta}^{+}(P) d\eta$$

où ν est la fréquence, λ la longueur d'onde, η le nombre d'ondes.

$$\lambda = c/\nu \quad \eta = \frac{1}{\lambda}$$

- Rayonnement d'équilibre : dans une situation d'équilibre à une température T , le rayonnement est isotrope et, à une fréquence donnée, il ne dépend que de la température ; pour toute surface et en tout point sur cette surface

$$M_{\Sigma, \nu}^{+}(P) = \pi_{\Sigma, \nu}^{-}(P) = \pi m_{\nu}^2 L_{\nu}^{eq}(T)$$

où m_{ν} est l'indice de réfraction et $L_{\nu}^{eq}(T)$ est la luminance du rayonnement d'équilibre (ou encore la luminance de Planck)

$$L_{\nu}^{eq}(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2 \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

La grandeur $\boxed{\pi^{eq}(T) = \int_0^{+\infty} \pi L_{\nu}^{eq}(T) d\nu = \sigma T^4}$ est appelée l'émittance du rayonnement d'équilibre et $\boxed{\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}}$ est la constante de Stefan-Boltzmann

Propriété importante : si $T_1 < T_2$ alors à chaque fréquence $L_{\nu}^{eq}(T_1) < L_{\nu}^{eq}(T_2)$

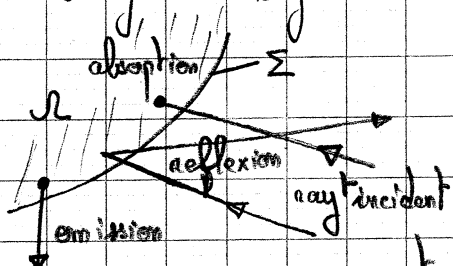
- Corps noir : un système Ω de frontière Σ est un corps noir si tout photon entrant dans Ω (à travers Σ) est absorbé dans Ω (ne rebondisse pas Σ).
Conséquence : tout photon sortant de Ω a nécessairement été émis à l'intérieur de Ω (pour un corps noir le rayonnement de rayonnement sortant

est égal au rayonnement émis, pas de réflexion, pas de rétrodiffusion).

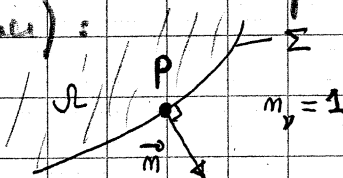
Propriété : sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, le rayonnement sortant d'un corps noir isotherme à T est égal au rayonnement d'équilibre à T .

• Surface opaque mate (ou surface mate) :

On parle de surface opaque quand le rayonnement ne peut pénétrer que très peu profondément dans la matière. Si une surface opaque est mate aucun rayonnement incident n'est réfléchi (tout est absorbé). Sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, le rayonnement émis par une surface mate est égal au rayonnement d'équilibre à la température de la surface. Pour une surface mate entourée d'un milieu d'indice de réfraction égal à l'unité (c'est encore "mat" pour P ou P_{air}) :



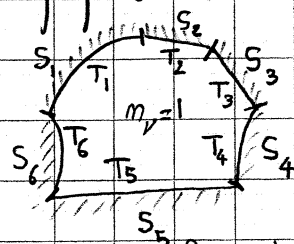
$$M^+(P) = M_{\text{émis}} = \sigma T(P)^4$$



• Facteurs de forme (facteurs de vue)

On considère une enceinte constituée de N surfaces opaques mates S_i $i \in \{1, \dots, N\}$ chacune isotherme de température T_i .

On appelle facteur de forme de S_i vers S_j et on note $F_{i \rightarrow j}$ la fraction du rayonnement émis par S_i qui atteint S_j (il s'agit donc d'un nombre entre 0 et 1). Si au sein de l'enceinte le milieu est transparent



alors la conservation de l'énergie impose
$$\sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} = 1$$

⚠ en toute généralité $F_{i \rightarrow i} \neq 0$

Le second principe de la Thermodynamique impose
$$S_i F_{i \rightarrow j} = S_j F_{j \rightarrow i}$$

Le flux net radiatif à la surface S_i s'écrit (orientation vers l'extérieur)

$$\phi_{S_i} = S_i \sigma T_i^4 - \sum_{j=1}^N S_j \sigma T_j^4 F_{j \rightarrow i}$$

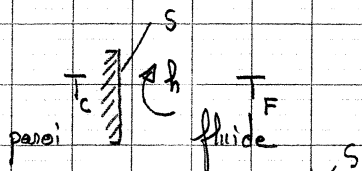
ou

$$\phi_{S_i} = \sum_{j=1}^N S_j F_{j \rightarrow i} \sigma (T_i^4 - T_j^4) = \sum_{j=1}^N S_j F_{j \rightarrow i} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

Résistances thermiques

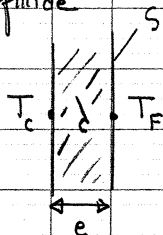
Lorsqu'on étudie un flux de chaleur ϕ en régime stationnaire entre deux sources de chaleur, une source chaude à une température T_c et une source froide à une température T_f , et lorsque ϕ est une fonction linéaire de l'écart de température $T_c - T_f$, on définit la résistance thermique comme le rapport $R = \frac{T_c - T_f}{\phi}$ (penser à $R = \frac{AV}{I}$ pour les résistances électriques)

Exemple 1 : convection



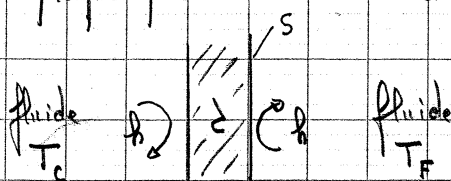
$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hS}$$

Exemple 2 : conduction plaque plane



$$R_{\text{cond}} = \frac{e}{\lambda S}$$

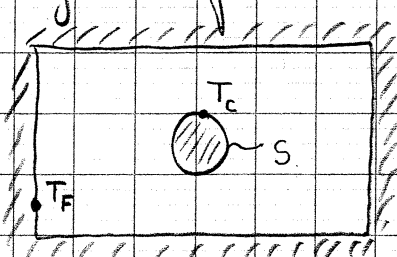
Exemple 3 : plaque plane conductive et convection sur les deux faces



$$R = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Exemple 4 : échange radiatif entre une sphère et une enceinte (maison)

$$\phi = S \sigma (T_c^4 - T_f^4)$$



Si T_c et T_f sont proches d'une température de référence T_{ref} donnée, alors on peut

linéariser T_c^4 et T_f^4 autour de T_{ref}

$$T_c^4 \approx T_{\text{ref}}^4 + 4 T_{\text{ref}}^3 (T_c - T_{\text{ref}})$$

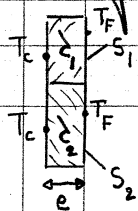
$$T_f^4 \approx T_{\text{ref}}^4 + 4 T_{\text{ref}}^3 (T_f - T_{\text{ref}})$$

$$\phi \approx S \sigma 4 T_{\text{ref}}^3 (T_c - T_f)$$

$$R_{\text{ray}} = \frac{1}{4 \sigma T_{\text{ref}}^3 S}$$

Par analogie avec la convection, $h_{\text{ray}} = 4 \sigma T_{\text{ref}}^3$ est appelé coefficient d'échange radiatif

Exemple 5 : conduction



$$\frac{1}{R} = \frac{\lambda_1 S_1}{e_1} + \frac{\lambda_2 S_2}{e_2}$$

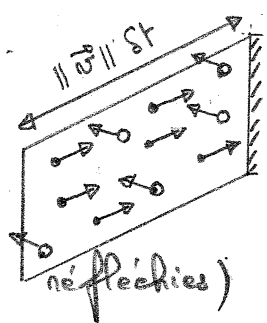
Résumé de la démonstration de la pression cinétique du gaz parfait

- A - La pression sur une paroi est associée à la somme des composantes normales des forces exercées par les molécules sur la paroi.
- B - Sous l'hypothèse d'une collision élastique, chaque molécule impactant la paroi contribue à 2 fois la composante normale de son impulsion initiale, soit $2 m v_x$, si v_x est la composante normale de sa vitesse initiale.

C - Si N_{col} collisions ont lieu sur une surface δS pendant δt :

$$P \delta S \delta t = \sum_{N_{col}} 2 m v_x$$

D - Si toutes les molécules avaient la même vitesse avant collision, N_{col} serait le nombre de molécules contenues dans le volume ci-dessous à l'instant initial,



soit $N_{col} = \delta S v_x \delta t \rho \frac{1}{2}$
 La densité est $\rho = \frac{N}{V}$
 où N est le nombre total de molécules dans l'enceinte et V le volume de l'enceinte.

où ρ est la densité de molécules (le facteur $\frac{1}{2}$ vient du fait que la moitié des molécules sont des molécules

$$\left. \begin{aligned} N_{col} &= \delta S v_x \delta t \frac{N}{V} \frac{1}{2} \\ P \delta S \delta t &= N_{col} \cdot 2 m v_x \end{aligned} \right\} P = m v_x^2 \frac{N}{V}$$

E - Si on tient compte de la distribution des vitesses : $P = m \langle v_x^2 \rangle \frac{N}{V}$

Or $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ et $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$, donc $P = \frac{N}{V} k_B T$

Les concepts à retenir dans la partie cinétique

- Etat stationnaire macroscopiquement (point de vue statistique), malgré l'agitation moléculaire
- Notion de flux (associé à une surface) ---> Rq: Dans la démonstration ci-dessus, la pression est reliée à une densité surfacique de flux d'impulsion
- Grandeurs intensives et extensives.
- Equilibre thermodynamique (stationnaire et aucun flux)
- L'hypothèse du gaz parfait.
- L'énergie interne du gaz parfait monoatomique : $U = N \frac{3}{2} k_B T$
- Définitions de la vitesse moyenne (vitesse macro) $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle$, la vitesse quadratique moyenne d'agitation $v_q = \sqrt{\langle (\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}$, la température cinétique. $\frac{3}{2} k_B T = \langle \frac{1}{2} m (\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle$