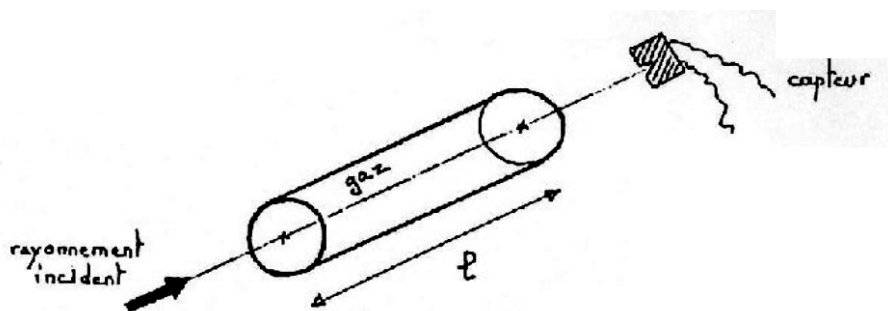


# Comportement moyen à l'échelle d'une raie

Dans tout ce qui suit, on considère un gaz isotherme. Ce gaz est contenu par une enceinte cylindrique dont les deux faces planes sont parfaitement transparentes au rayonnement infrarouge. Cette enceinte est placée dans un spectromètre infrarouge, de sorte que l'on mesure sa transmittivité moyenne sur une bande de fréquence de largeur  $\Delta\nu$  autour de la fréquence  $\nu_0$ .



Les hypothèses sont les suivantes : la luminance incidente a un spectre plat ( $L_{i,\nu} = L_i$ ) ; il n'y a aucune atténuation ni émission ou diffusion à l'extérieur de l'enceinte ; le gaz est à température suffisamment faible pour que la luminance du corps noir à cette température soit négligeable devant  $L_i$ .

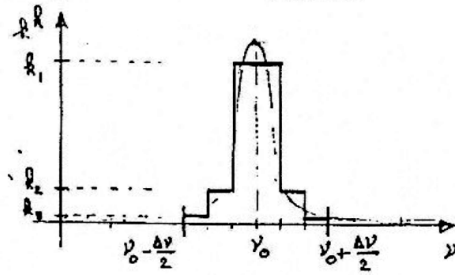
Si  $\Delta\nu$  est très faible, on peut raisonner en modèle monochromatique et on peut prévoir que la transmittivité<sup>1</sup> moyenne  $\bar{\tau}(l)$  de la colonne de gaz sera  $\bar{\tau}(l) = \exp(-\bar{k}l)$  où  $\bar{k}$  est le coefficient d'extinction moyen sur  $\Delta\nu$  et  $l$  est la longueur de la colonne. Ici  $\bar{k} \propto k(\nu_0)$ .

Si  $\Delta\nu$  est de l'ordre d'une longueur de raie ou supérieure, le coefficient d'extinction dépend fortement de la longueur d'onde et la transmittivité moyenne ne suit plus une loi exponentielle. On peut toujours définir le coefficient d'extinction moyen  $\bar{k} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\Delta\nu} k(\nu) d\nu$  mais  $\bar{\tau}(l) \neq \exp(-\bar{k}l)$  de façon générale.

A titre d'illustration, on peut considérer un intervalle  $\Delta\nu$  qui ne contient qu'une seule raie (absorption pure, pas de diffusion) que l'on peut schématiser de la façon suivante :

---

1. transmittivité :  $\tau = \frac{\text{flux transmis en } W/m^2}{\text{flux incident}}$ , absorptivité :  $\alpha = \frac{\text{flux absorbé}}{\text{flux incident}}$ ,  
 émissivité :  $\epsilon = \frac{\text{luminance du corps}}{\text{luminance d'un corps noir à la même température}}$  la plupart du temps  $\alpha = \epsilon$  et  $\tau = 1 - \epsilon$



on peut découper  $\Delta\nu$  en trois zones de largeurs égales ; sur chaque zone on suppose que le coefficient d'absorption est indépendant de la fréquence ; la première zone est caractérisée par un coefficient d'absorption  $k_1 = 10m^{-1}$  (elle correspond au centre de la raie) ; sur la seconde zone  $k = k_2 = 0.1m^{-1}$  ; sur la troisième zone  $k = k_3 = 10^{-3}m^{-1}$  (ailes de raie). Le coefficient d'absorption moyen est donc  $\bar{k} = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$ . La transmittivité moyenne est par définition :

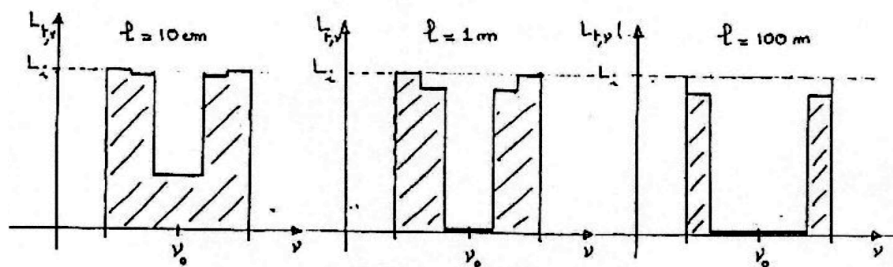
$$\bar{\tau}(l) = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\Delta\nu} \tau_\nu(l) d\nu = \dots \frac{1}{3} [\exp(-k_1 l) + \exp(-k_2 l) + \exp(-k_3 l)]$$

*Question* : pour quelles valeurs de  $l$  la loi exponentielle  $\bar{\tau}(l) \simeq \exp(-\bar{k}l)$  est-elle valable ?

Cette approximation est valable pour les valeurs de  $l$  qui vérifient  $k_1 l \ll 1$ , soit pour des longueurs de colonne de l'ordre du millimètre.

*Question* : que devient  $\bar{\tau}(l)$  pour des longueurs supérieures à 100m ?  
L'extinction est quasi totale dans les deux premières zones ( $\exp(-k_1 l) \ll \exp(-k_3 l)$  et  $\exp(-k_2 l) \ll \exp(-k_3 l)$ ) et on obtient  $\bar{\tau}(l) = \frac{1}{3} \exp(-k_3 l)$ . A grande distance on ne retrouve que l'influence des ailes de raie.

*Question* : quels sont les spectres de luminance pour  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 1 \text{ m}$  et  $l = 100 \text{ m}$  ?



L'aire hachurée représente la luminance transmise (intégrée sur la bande), soit

$$\Delta\nu \cdot L_i \cdot \bar{\tau}(l)$$

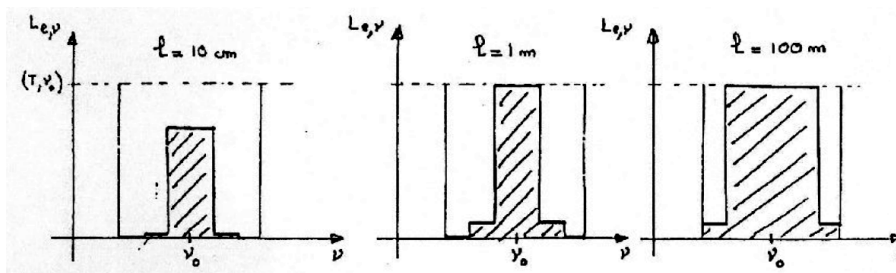
*Question* : quelle est la luminance sortant de la colonne de gaz, due à l'émission de la colonne? Quel est son spectre pour  $l=10\text{cm}$ ,  $l=1\text{m}$  et  $l=100\text{m}$  ?

Par application du principe de la cavité isotherme, on obtient que la luminance émise sortant de la colonne est :

$$L_{e,\nu} = L_b(T, \nu)[1 - \tau_\nu(l)] \text{ avec } L_b \text{ luminance du corps noir}$$

Si on fait l'hypothèse selon laquelle  $\Delta\nu$  est suffisamment faible pour que  $L_b(T, \nu)$  puisse être supposé indépendant de la fréquence sur la bande considérée, alors  $L_{e,\nu}$  intégré sur  $\Delta\nu$  devient :

$$L_{e,\nu} = \int_{\Delta\nu} L_{e,\nu} d\nu = L_b(T, \nu_0)[1 - \bar{\tau}(l)]$$

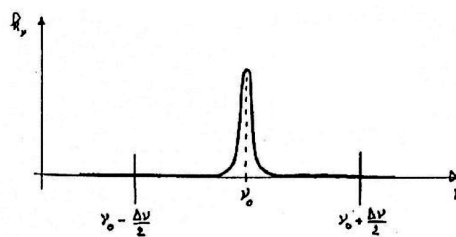


On voit que les comportements moyens sont très différents selon que l'on observe des phénomènes à courte ou longue distance. La plage de fréquence dominante se déplace et il n'est pas possible de rendre compte de l'ensemble de ces comportements à l'aide d'une simple loi exponentielle. Pour l'analyse des propriétés spectrales, il est primordial de déterminer, pour les distances considérées, si ce sont les centres de raies ou les ailes de raie qui vont dominés dans le phénomène observé.

On peut reprendre l'analyse précédente avec un profil de Lorentz. On suppose que la bande  $\Delta\nu$  ne contient toujours qu'une seule raie. De plus  $\Delta\nu$  est grand devant la largeur de raie de sorte que (pour les longueurs considérées) la raie n'a aucune influence à l'extérieur de  $\Delta\nu$ . Dit autrement, si la raie est centrée en  $\nu_0$ , les fréquences  $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$  et  $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$  sont assimilables respectivement à l'infini à gauche et l'infini à droite de la raie. En particulier :

$$\int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} F(\nu - \nu_0) d\nu \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu - \nu_0) d\nu = 1$$

La raie considérée est une raie de Lorentz d'intensité  $S$  et de demi-largeur à mi-hauteur  $b$ . Le coefficient d'absorption à la fréquence  $\nu$  s'écrit donc  $k_\nu = SF(\nu - \nu_0)$  avec  $F(\nu - \nu_0) = \frac{b}{\pi[(\nu - \nu_0)^2 + b^2]}$



On définit la largeur équivalent  $W = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \exp(-k_\nu l)] d\nu$ . Si on considère une luminance incidente  $L_{i,\nu}$  avec un spectre plat ( $L_{i,\nu} = L_i$ ), la luminance transmise intégrée peut s'écrire :

$$L_{t,\Delta\nu} = \int_{\Delta\nu} L_i \exp(-k_\nu l) d\nu = L_i(\Delta\nu - W) = \Delta\nu L_i \left(1 - \frac{W}{\Delta\nu}\right)$$

et la luminance absorbée intégrée s'écrit

$$L_{a,\Delta\nu} = \Delta\nu L_i \frac{W}{\Delta\nu}$$

On voit donc que  $W$  représente la largeur d'une bande opaque équivalente. Attention  $W$  est une fonction de la longueur de la colonne de gaz étudiée.

Il y a deux cas "limite" qui servent de référence pour l'analyse des spectres de raies : les limites "raie faible" et "raie forte". La limite raie faible correspond aux longueurs (quantité d'absorbant) suffisamment faibles pour que l'on puisse faire l'hypothèse d'un milieu optiquement mince à toutes les fréquences ( $k_\nu l \ll 1$ ). Dans ce cas  $W$  peut s'écrire :

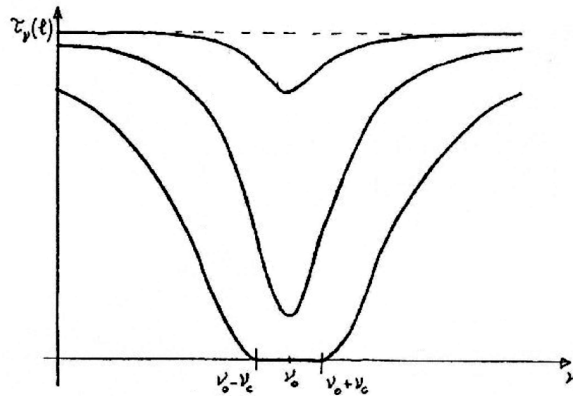
$$W_{faible} = \int_{-\infty}^{+\infty} k_\nu l d\nu = Sl \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu - \nu_0) d\nu = Sl$$

Ce résultat est indépendant de la forme de la raie.

La limite raie forte correspond aux fortes absorptions. Dans le cas d'une raie de Lorentz, cette limite se définit par  $\frac{Sl}{2\pi b} \gg 1$  et  $W$  peut alors s'approximer par :

$$W_{forte} = 2\sqrt{bS}\sqrt{l}$$

Démonstration : le point de départ est le fait que quelque soit  $\nu_c > 0$ , il existe une longueur  $l$  au delà de laquelle l'atténuation est quasi totale sur l'intervalle  $[\nu_0 - \nu_c, \nu_0 + \nu_c]$



On choisi  $\nu_c$  tel que  $b^2 \ll \nu_c^2$  et on décompose  $W$  en  $W_1 + W_2$  avec

$$W_1 = \int_{\nu_0 - \nu_c}^{\nu_0 + \nu_c} [1 - \exp(-k_\nu l)] d\nu \text{ et } W_2 = 2 \int_{\nu_0 + \nu_c}^{+\infty} [1 - \exp(-k_\nu l)] d\nu$$

$W_2$  peut s'écrire :

$$W_2 = 2 \int_{\nu_0+\nu_c}^{+\infty} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Sl}{\pi} \frac{b}{(\nu - \nu_0)^2 + b^2} \right) \right] d\nu \simeq 2 \int_{\nu_0+\nu_c}^{+\infty} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Sl}{\pi} \frac{b}{(\nu - \nu_0)^2} \right) \right] d\nu$$

$W_1$  est sensiblement égal à  $2\nu_c$  (atténuation totale),

or  $W_1 < \int_{\nu_0-\nu_c}^{\nu_0+\nu_c} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Sl}{\pi} \frac{b}{(\nu - \nu_0)^2} \right) \right] d\nu < 2\nu_c$  donc  $W_1$  peut aussi s'écrire :

$$W_1 \simeq \int_{\nu_0-\nu_c}^{\nu_0+\nu_c} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Sl}{\pi} \frac{b}{(\nu - \nu_0)^2} \right) \right] d\nu$$

Enfin :

$$W = W_1+W_2 \simeq 2 \int_0^{+\infty} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Sl}{\pi} \frac{b}{(\nu - \nu_0)^2} \right) \right] d\nu = \frac{\sqrt{bSl}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp(-x)}{x^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{bSl}}{\pi} 2\sqrt{\pi}$$

Remarque : le fait que la limite raie forte conduise à des largeurs équivalentes proportionnelles à  $\sqrt{l}$  est surprenant si l'on pense qu'ainsi  $\lim_{l \rightarrow +\infty} W(l) = +\infty$  et que l'on revient aux images associées à la largeur équivalente, en particulier  $L_{t,\Delta\nu} = \Delta\nu L_i \left( 1 - \frac{W}{\Delta\nu} \right)$ . On peut en effet imaginer que cette limite conduit à des luminances transmises négatives ... Il n'en est rien car l'hypothèse faite que la raie n'a aucune influence à l'extérieur de  $\Delta\nu$  conduit à des  $\Delta\nu$  de plus en plus larges lorsque  $l$  augmente et que la raie s'étale. On retient que si  $\Delta\nu$  ne contient qu'une seule raie, la transmittivité moyenne s'écrit :

$$\bar{\tau}(l) = 1 - \frac{W(l)}{\Delta\nu}$$

# Comportement moyen à l'échelle d'une bande étroite

Dans un premier temps, on suppose que  $\Delta\nu$  contient  $N$  raies d'intensité  $S_i$  et de demi-largeur à mi-hauteur  $b_i$ . On suppose toujours que les raies n'ont aucune influence à l'extérieur de l'intervalle. On suppose de plus qu'il n'y a aucune superposition de raies, c'est à dire qu'à chaque fréquence  $\nu$ , seule une raie peut avoir un effet non négligeable.



On peut toujours définir la largeur équivalente comme précédemment  $W = \int_{\Delta\nu} [1 - \exp(-k_\nu l)] d\nu$ . On montre alors que sous les hypothèses précédentes,  $W$  s'écrit comme la somme des largeurs équivalentes de chaque raie  $W_{Ri}$

$$W = \sum_{i=1}^N W_{Ri}$$

De la même façon que précédemment on peut prendre les limites faibles et fortes :

$$W_{faible} = \left( \sum_{i=1}^N S_i \right) l$$

$$W_{forte} = 2 \left( \sum_{i=1}^N \sqrt{b_i S_i} \right) \sqrt{l}$$

Un tel modèle est un modèle à  $2N$  paramètres, soit potentiellement un nombre élevé de paramètres dès lors que  $\Delta\nu$  augmente. Plusieurs auteurs ont proposés des modèles simplifiés. Le premier de ces modèles fait l'hypothèse que les  $N$  raies sont identiques avec une même demi-largeur à mi-hauteur  $\bar{b}$  et une intensité  $\bar{S}$ . Pour déterminer ces deux paramètres, on impose que le modèle ait un comportement "exact" aux limites faible et forte. Cela se traduit par les deux équations suivantes :

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i$$

et

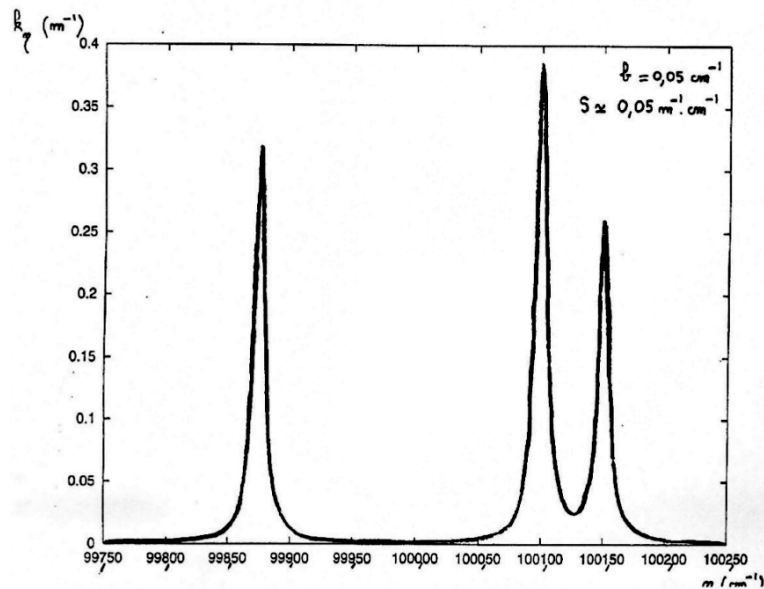
$$N\sqrt{\bar{b}\bar{S}} = \sum_{i=1}^N \sqrt{b_i S_i}$$

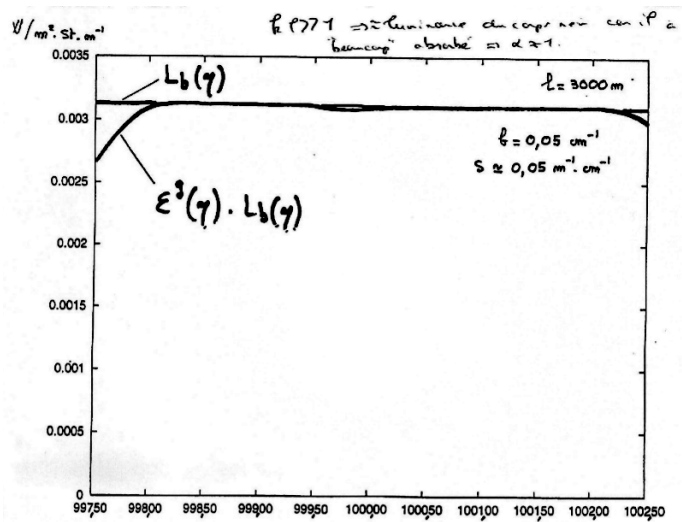
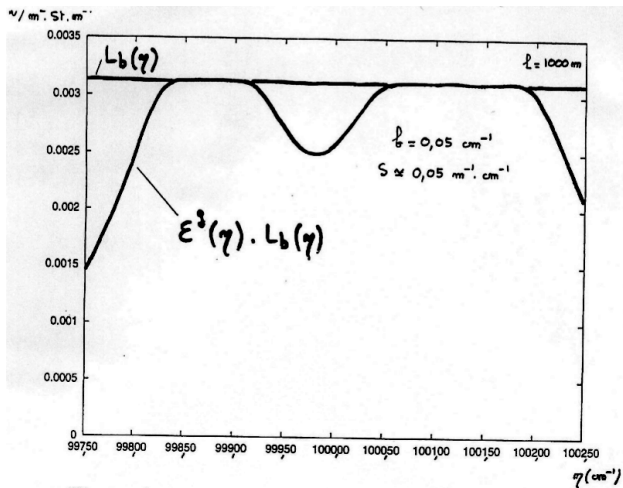
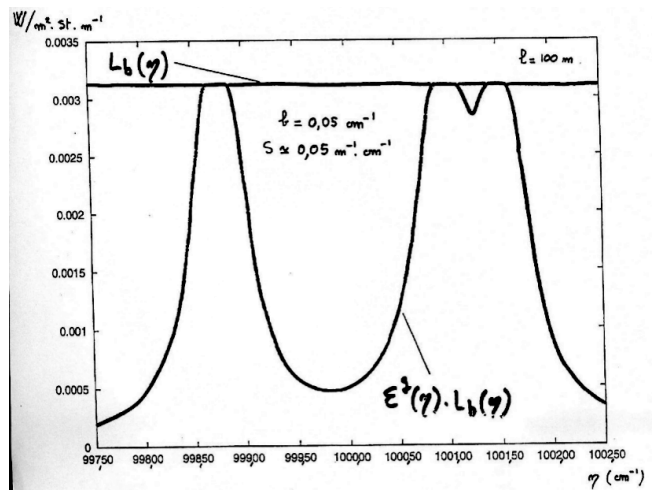
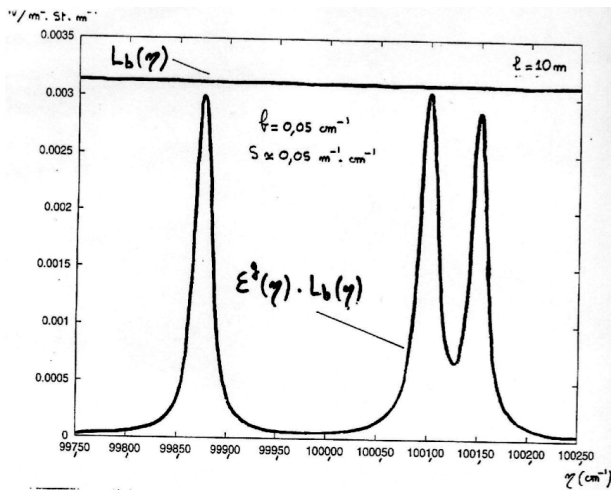
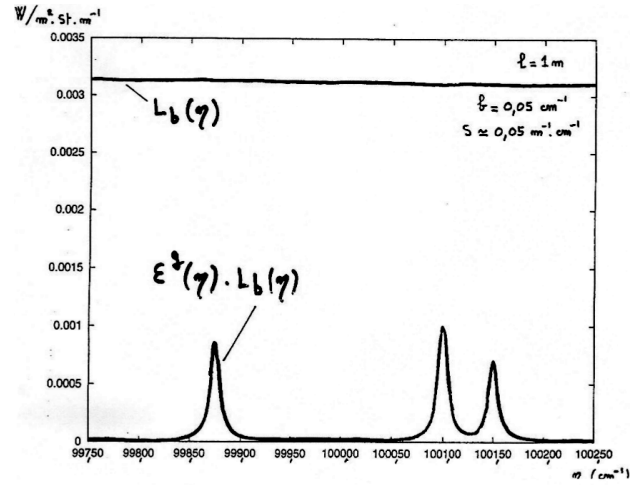
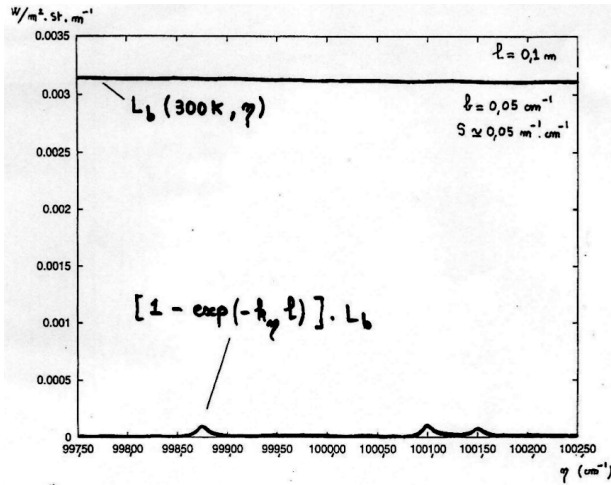
Soit

$$\bar{b} = \frac{1}{\bar{S}} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{b_i S_i} \right)^2$$

Ce modèle se comporte assez mal en dehors des limites faibles et fortes. Il ne peut pas rendre compte du fait que pour différentes longueurs, ce sont des raies différentes qui jouent un rôle primordial : pour les courtes distances, les raies fortes dominent alors que pour les distances plus élevées les ailes des raies fortes se combinent avec les raies de faibles intensités.

Des modèles plus réalistes ont été proposés dans lesquels on fait l'hypothèse que le nombre de raies  $N$  est élevé et que les intensités de raies sont distribuées statistiquement selon une densité de probabilité donnée. Nous ne considérerons





ici que le modèle de Malkmus qui est très largement employé et qui possède des propriétés mathématiques intéressantes et autorise de nombreux développements analytiques. Dans ce modèle on suppose que toutes les raies ont la même demi-largeur à mi-hauteur  $b^*$  et que les intensités de raies sont distribuées selon la densité de probabilité  $p(s) = \frac{1}{S^*} \exp(-\frac{s}{S^*})$  où  $S^*$  est un paramètre qui représente la valeur moyenne de  $S$  selon



p(s). Dans ces conditions, la largeur équivalente moyenne de raie s'écrit :

$$\bar{W} = \int_0^{+\infty} p(s) \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \exp(-SF(\nu)l)] d\nu dS$$

Si F correspond à une forme de raie de Lorentz,  $\bar{W}$  est intégrable analytiquement et s'écrit :

$$\bar{W} = \frac{\pi}{2} b^* \left[ \sqrt{1 + \frac{4S^*l}{\pi b^*}} - 1 \right]$$

La largeur équivalente pour les N raies est donc  $\boxed{W \simeq N\bar{W}}$  avec toujours  $\bar{\tau} = 1 - \frac{W(l)}{\Delta\nu}$

De façon à identifier les paramètres  $b^*$  et  $S^*$  à partir des données spectrales (intensités et largeurs des raies réelles), on impose la validité du modèle aux limites faible et forte.

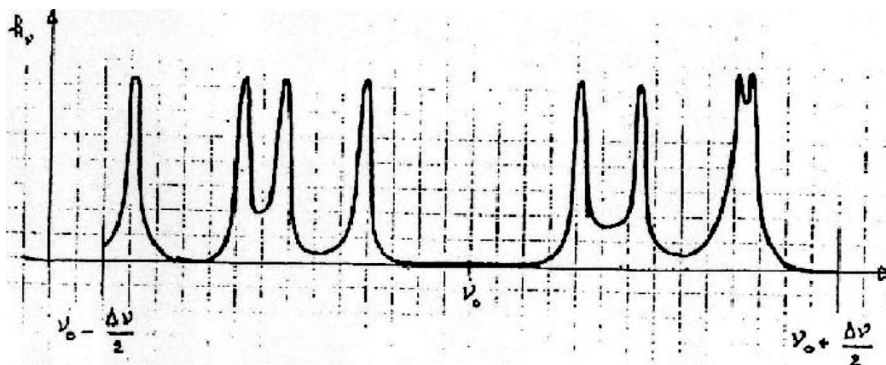
A la limite faible, le modèle de Malkmus devient  $W \simeq NS^*l$ , or  $W_{faible} = N\bar{S}$ , donc  $\boxed{S^* = \bar{S}}$ .

A la limite forte, on obtient  $W \simeq N\sqrt{\pi b^* S^* l}$ , à comparer à  $W_{forte} = 2N\sqrt{\bar{b}\bar{S}}\sqrt{l}$ . Cela conduit à  $\boxed{b^* = \frac{4}{\pi}\bar{b}}$ .

Par conséquent, si l'on peut déterminer par connaissance du spectre l'intensité moyenne de raie  $\bar{S}$  ainsi que la demi largeur moyenne de raie à mi-hauteur  $\bar{b}$  (en remarquant que  $\bar{b}$  n'est pas une valeur moyenne à strictement parler - voir la définition), on peut approcher la largeur équivalente moyenne par l'expression de Malkmus, soit en remplaçant  $S^*$  et  $b^*$  par leur expression en fonction des données spectrales :

$$\bar{W} \simeq 2\bar{b} \left[ \sqrt{1 + \frac{\bar{S}l}{\bar{b}}} - 1 \right]$$

A ce stade le modèle ne tient compte d'aucun effet de superposition de raies. Or, pour la plupart des spectres étudiés il n'est pas possible de faire l'hypothèse que le profil du coefficient d'absorption au niveau d'une raie n'est pas affecté par les raies adjacentes (ou plus éloignées). Pour inclure l'effet des superpositions de raies, on commence par considérer que  $\Delta\nu$  contient N raies identiques (même intensité S et même forme F). Il n'est faite aucune hypothèse quant à la séparation des raies. On suppose que les centres de raies  $\nu_i$  sont distribués aléatoirement de façon uniforme sur  $\Delta\nu$ .



On suppose qu'à la fréquence  $\nu_0$ , la transmittivité ne dépend que des N raies à l'intérieur de  $\Delta\nu$ . Cette transmittivité s'écrit donc :

$$\tau_{\nu_0}(l) = \exp\left(-Sl \sum_{i=1}^N F(\nu - \nu_i)\right)$$

Elle dépend directement des valeurs des positions des centres de raies  $\nu_i$ . Pour différentes réalisations du vecteur aléatoire  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i)$ ,  $\tau_{\nu_0}(l)$  prendra donc des valeurs aléatoires dont la moyenne est :

$$\langle \tau_{\nu_0}(l) \rangle = \int_{\Delta\nu} p(\nu_1) d\nu_1 \int_{\Delta\nu} p(\nu_2) d\nu_2 \cdots \int_{\Delta\nu} p(\nu_N) d\nu_N \exp\left(-Sl \sum_{i=1}^N F(\nu_0 - \nu_i)\right)$$

avec  $p(\nu_i) = 1/\Delta\nu$ . Soit encore :

$$\begin{aligned} \langle \tau_{\nu_0}(l) \rangle &= \prod_{i=1}^N \int_{\Delta\nu} p(\nu_i) d\nu_i \exp(-Sl F(\nu_0 - \nu_i)) \\ \langle \tau_{\nu_0}(l) \rangle &= \left(1 - \frac{W_R}{\Delta\nu}\right)^N \end{aligned}$$

On note  $\bar{\delta} = \frac{\Delta\nu}{N}$  que l'on nomme l'espacement moyen de raies et on fait tendre le nombre de raies N vers l'infini en conservant  $\bar{\delta}$  (c'est à dire en faisant tendre  $\Delta\nu$  vers l'infini également). On obtient :

$$\langle \tau_{\nu_0}(l) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{W_R}{N\bar{\delta}}\right)^N = \exp\left(-\frac{W_R}{\bar{\delta}}\right)$$

En pratique, ce résultat est surtout utile lorsque l'on considère un réseau infini de raies d'espacement moyen  $\bar{\delta}$ . Dans ce cas, le résultat démontré pour  $\nu_0$  est vrai à toutes les fréquences et si l'on considère un intervalle suffisamment large, on peut supposer que sur l'ensemble des fréquences, toutes les distributions possibles sont rencontrées et par conséquent la transmittivité moyenne de bande est elle-même. :

$$\boxed{\bar{\tau}(l) = \exp\left(-\frac{W_R}{\bar{\delta}}\right)}$$

Il ne reste plus qu'à combiner ce résultat (qui permet de prendre en compte les superpositions de raies) avec le modèle de Malkmus (qui permet de rendre compte des distributions d'intensités de raies). Pour cela considère une bande de fréquence de largeur  $\Delta\nu$  qui contient un grand nombre de raies d'espacement moyen  $\bar{\delta}$ . On fait l'hypothèse que l'on peut décomposer cet ensemble de raies en N familles de raies identiques. On suppose qu'à l'intérieur de chaque famille l'espacement moyen entre raies est :  $N\bar{\delta}$  et que les centres de raie sont distribués uniformément sur  $\Delta\nu$ . Ces conditions du paragraphe précédent sont donc réunies et la transmittivité moyenne de chaque famille prise isolément est donc  $\bar{\tau}_i(l) = \exp\left(-\frac{W_{Ri}}{N\bar{\delta}}\right)$ . On suppose de plus que la distribution des centres de raies pour une famille est indépendante de celles des autres familles. Sous cette hypothèse on

peut montrer (par le même type d'écritures que celles ayant conduit précédemment à l'expression de  $\langle \tau_{\nu_0}(l) \rangle$ ) que la transmittivité moyenne résultant de la totalité des raies s'écrit :

$$\bar{\tau}(l) = \prod_{i=1}^N \bar{\tau}_i(l) = \exp\left(-\frac{\bar{W}_R}{\bar{\delta}}\right)$$

[Si] l'on fait de plus l'hypothèse que dans chaque famille les raies sont des raies de Lorentz de demi-largeur à mi-hauteur  $b^*$  et d'intensité  $S_i$  et que  $S_i$  est distribué selon la distribution de Malkmus sur les N familles, [alors] on peut utiliser l'expression de Malkmus pour  $\bar{W}_k$  et on obtient la transmittivité moyenne suivante comme sous le "modèle statistique à bandes étroites de Malkmus"

$$\bar{\tau}(l) = \exp\left[-\frac{\pi b^*}{2 \bar{\delta}} \left(\sqrt{1 + \frac{4 S^* l}{\pi b^*}} - 1\right)\right]$$

Comme précédemment, si l'on veut identifier les deux paramètres  $b^*$  et  $S^*$  à partir des données spectrales, on impose que les limites faibles et fortes soient exactes. On montre alors que  $\bar{\tau}(l)$  s'écrit de la façon suivante en fonction de l'intensité moyenne de raies  $\bar{S}$  et de la demi-largeur à mi-hauteur  $\bar{b}$  (qui n'est pas une vraie moyenne ...)

$$\bar{\tau}(l) = \exp\left[-\frac{2\bar{b}}{\bar{\delta}} \left(\sqrt{1 + \frac{l\bar{S}}{\bar{b}}} - 1\right)\right] \quad (\text{sous condition})$$

On peut noter que la valeur moyenne du coefficient d'absorption est reliée à  $\bar{S}$  de la façon suivante :

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\Delta\nu} k_\nu d\nu = \frac{1}{\Delta\nu} N\bar{S} = \frac{\bar{S}}{\bar{\delta}}$$

Il est alors pratique d'introduire le paramètre  $\Phi = \frac{2\bar{b}}{\bar{\delta}}$  appelé paramètre de forme. La transmittivité moyenne peut alors s'écrire :

$$\bar{\tau}(l) = \exp[\Phi - \Phi^*(l)] \quad \text{avec} \quad \Phi^*(l) = \Phi \left(1 + \frac{2\bar{k}l}{\Phi}\right)^{1/2}$$

Les deux paramètres du modèle sont alors  $\bar{k}$  et  $\Phi$ .  $\bar{k}$  est le coefficient d'absorption moyen sur la bande étroite et  $\Phi$  caractérise l'allure du spectre : les faibles valeurs de  $\Phi$  correspondent à des spectres où les raies sont nettement séparées et les fortes valeurs de  $\Phi$  correspondent à des spectres avec de forts recouvrements de raies. A la limite des très grandes valeurs de  $\Phi$ , on peut écrire  $\Phi^*(l) = \Phi - \bar{k}l$  et on retrouve le modèle d'un spectre plat :  $\bar{\tau}(l) \simeq \exp(-\bar{k}l)$ .

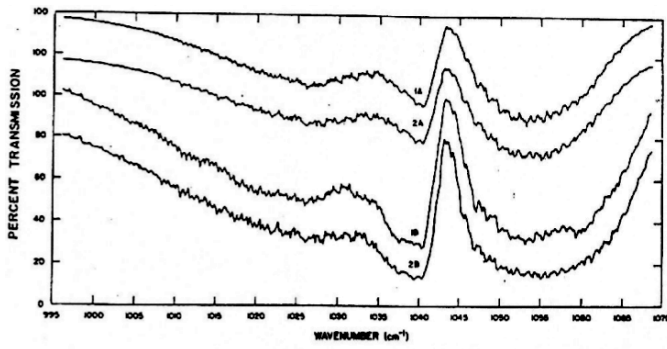
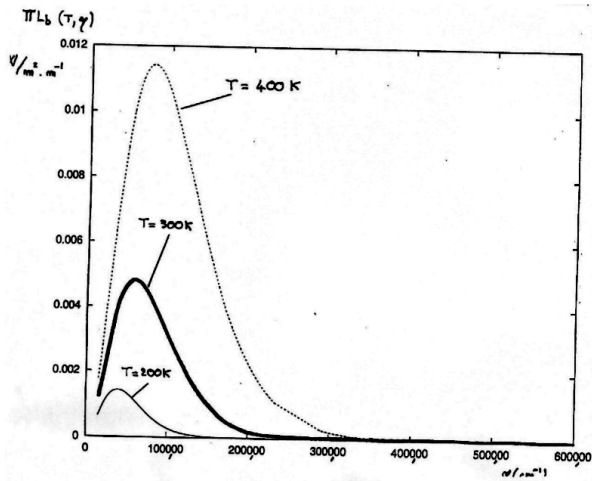
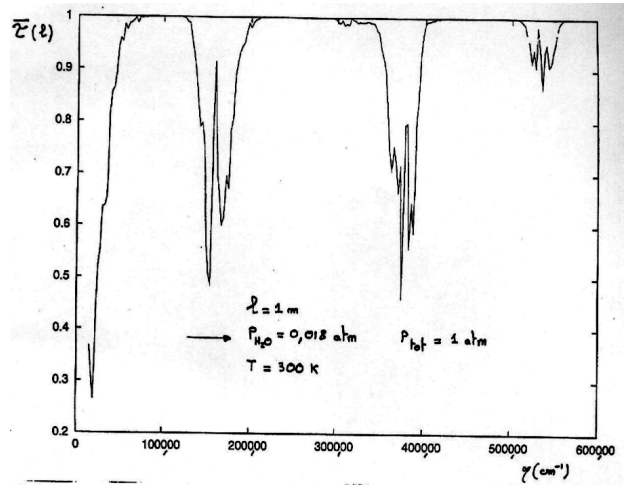
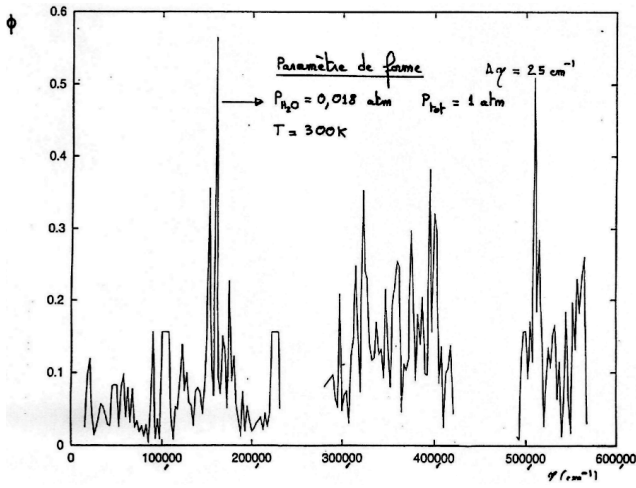
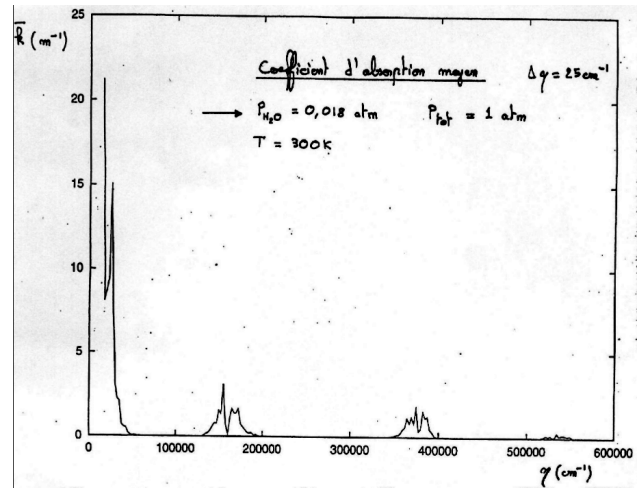


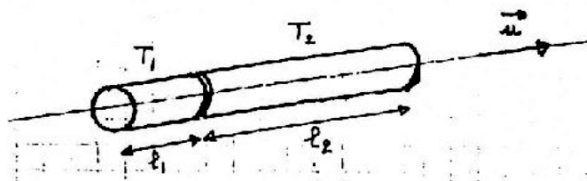
FIG. 4.17. Comparison of a random model with line-by-line calculations for the  $9.6 \mu\text{m}$  band of ozone. 1A and 1B are line-by-line calculations, while 2A and 2B use the same line parameters in a random model with an exponential distribution of line intensities. Calculations are for overlapping intervals, each  $25 \text{ cm}^{-1}$  wide; the line width is  $0.08 \text{ cm}^{-1}$  at s.l.p. and the temperature is  $233 \text{ K}$ . The upper curves are for a pressure of  $0.197 \text{ bar}$  and a path length of  $0.2447 \text{ cm}$ ; the lower curves are for  $0.0197 \text{ bar}$  and  $97.88 \text{ cm}$ . The model calculations are displaced downward by  $20\%$ . After Goldman and Kyle (1968).

Goody and Yung, 83



# L'utilisation des modèles à bande étroite

Le modèle statistique à bande étroite de Malkmus, ou de façon plus générale tout modèle à bande étroite, permet d'estimer simplement la transmittivité moyenne résultant d'un grand nombre de raies. On pourrait penser que tous les résultats et les types de formulations obtenus en modèle monochromatique sont directement exploitables en moyenne sur une bande étroite, en remplaçant simplement  $\tau_\nu(l) = \exp(-k_\nu l)$  par un modèle adapté de transmittivité moyenne : ce n'est pas le cas et il est essentiel de retenir que l'utilisation des modèles à bande étroite demande une grande vigilance d'écriture. Considérons, à titre d'illustration, deux colonnes de gaz consécutives. Les propriétés spectrales du gaz sont les mêmes dans les deux colonnes ; la première colonne est à la température  $T_1$ , la seconde à  $T_2$ .



On cherche à estimer la luminance intégrée sur  $\Delta\nu$  qui sort de la seconde colonne dans la direction  $\vec{u}$  due à l'émission de la première colonne. L'hypothèse première des modèles à bande étroite est que la luminance du corps noir est indépendante de la fréquence à l'intérieur de la bande :  $L_f(T, \nu) \simeq L_f(T, \nu_0)$ . A partir de cette hypothèse, de la propriété de la cavité isotherme et de la définition de la transmittivité moyenne, on peut montrer que la luminance intégrée sortant de la première colonne due à l'émission de la colonne est  $L_{e,\Delta\nu} = \Delta\nu L_b(T_1, \nu_0)[1 - \bar{\tau}(l_1)]$ .

Question : pourquoi la part de cette luminance transmise jusqu'à la sortie de la seconde colonne n'est-elle pas donnée par le produit de  $L_{e,\Delta\nu}$  par la transmittivité moyenne de la seconde colonne ?

$$L_{t,\Delta\nu} \neq L_{e,\Delta\nu} \bar{\tau}(l_2)$$

La raison pour laquelle  $\bar{\tau}(l_2)$  ne nous indique pas la fraction de  $L_{e,\Delta\nu}$  transmise par la seconde colonne est que le spectre de  $L_{e,\Delta\nu}$  n'est pas un spectre plat. En effet l'émission de la première colonne, si celle-ci n'est pas infiniment épaisse, se concentre autour des centre de raie (si l'épaisseur est infinie, la colonne se comporte comme un corps noir et le spectre est plat). Or  $\bar{\tau}(l_2)$  ne nous donne une indication sur la transmittivité de bande que dans deux cas : si le spectre incident est plat ou si ce spectre est parfaitement dé-corrélé du

spectre d'absorption. Ici, le spectre incident est concentré autour des raies d'absorption, il est donc fortement corrélé au spectre d'absorption.

Question : comment peut-on estimer correctement la luminance transmise dans ce cas ?

Il suffit pour cela de supposer temporairement que la seconde colonne, qui est remplie du même gaz est aussi à la même température  $T_1$ . La luminance intégrée sortante due à l'émission des deux colonnes isotherme est alors  $\Delta\nu L_f(T_1, \nu_0)[1 - \bar{\tau}(l_1 + l_2)]$ . Celle due à la seule émission de la seconde colonne est  $\Delta\nu L_f(T_1, \nu_0)[1 - \bar{\tau}(l_2)]$ . La luminance cherchée est alors obtenue par soustraction de ces deux luminances :

$$L_{t,\Delta\nu} = \Delta\nu L_b(T_1, \nu_0)[\bar{\tau}(l_2) - \bar{\tau}(l_1 + l_2)]$$

On peut aussi retrouver ce résultat à partir de l'intégration des luminances monochromatiques :

$$\begin{aligned} L_{t,\Delta\nu} &= \int_{\Delta\nu} L_{t,\nu} d\nu = \int_{\Delta\nu} d\nu \int_0^{l_1} dx \cdot k_\nu \cdot L_b(T, \nu) \exp(-k_\nu(x + l_2)) \\ &= \int_{\Delta\nu} d\nu \int_0^{l_1} dx \cdot L_b(T, \nu) \left\{ \frac{-\partial\tau_\nu}{\partial l}(x + l_2) \right\} \end{aligned}$$

Soit en intervertissant les intégrales et en sortant  $L_b(T, \nu) = L_b(T, \nu_0)$

$$\begin{aligned} L_{t,\Delta\nu} &= \int_0^{l_1} dx \cdot L_b(T, \nu_0) \int_{\Delta\nu} d\nu \left\{ \frac{-\partial\tau_\nu}{\partial l}(x + l_2) \right\} \\ &= \int_0^{l_1} dx \cdot L_b(T, \nu_0) \frac{\partial}{\partial l} \left[ \int_{\Delta\nu} -\tau_\nu(x + l_2) d\nu \right] = \int_0^{l_1} dx \cdot L_b(T, \nu_0) \Delta\nu \left\{ -\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial l}(x + l_2) \right\} \\ &= \Delta\nu L_b(T, \nu_0)[\bar{\tau}(l_2) - \bar{\tau}(l_1 + l_2)] \end{aligned}$$

De façon générale, dès lors que l'on travaille en formulations intégrales, on peut toujours remonter aux formulations monochromatiques (avant le développement des intégrales spatiales) et remplacer les transmittivités monochromatiques par les transmittivités moyennes. Mais les développements ultérieurs ne sont pas analogues, principalement à cause de la propriété du produit des exponentielles que ne satisfont pas les modèles de bande :

$$\boxed{\bar{\tau}(l_1 + l_2) \neq \bar{\tau}(l_1) \cdot \bar{\tau}(l_2)}$$

C'est bien à cause de cette inégalité que dans l'exemple précédent on ne retrouve pas le résultat attendu par analogie au modèle monochromatique.

$$L_{t,\Delta\nu} = \Delta\nu L_b(T, \nu_0)[\bar{\tau}(l_2) - \bar{\tau}(l_1 + l_2)] \neq \Delta\nu L_b(T, \nu_0)[1 - \bar{\tau}(l_1)]\bar{\tau}(l_2)$$

On retiendra donc que les puissances nettes échangées sur une bande étroite s'écrivent, dans le cas d'une cavité à parois noires remplie d'un gaz non-diffusif à propriétés radiatives uniformes :

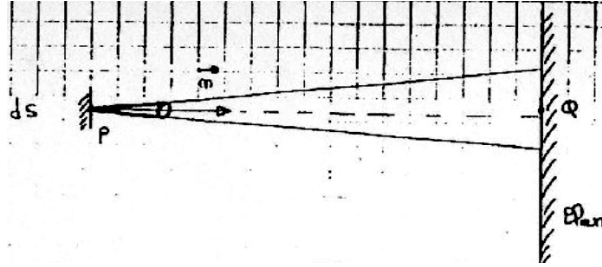
$$\Psi_{\Delta\nu}(S_i, S_j) = \Delta\nu \int_{S_i} ds(P) \int_{S_j} ds(Q) \frac{|u_{PQ} \cdot \vec{n}_P| |u_{PQ} \cdot \vec{n}_Q|}{l_{PQ}^2} \bar{\tau}(l_{PQ}) [L_b(P, \nu_0) - L_b(Q, \nu_0)]$$

$$\Psi_{\Delta\nu}(S_i, V_j) = \Delta\nu \int_{S_i} ds(P) \int_{V_j} dv(Q) \frac{|u_{PQ} \cdot \vec{n}_P|}{l_{PQ}^2} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial l}(l_{PQ}) [L_b(P, \nu_0) - L_b(Q, \nu_0)]$$

$$\Psi_{\Delta\nu}(V_i, V_j) = \Delta\nu \int_{V_i} dv(P) \int_{V_j} dv(Q) \frac{1}{l_{PQ}^2} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial l^2}(l_{PQ}) [L_b(P, \nu_0) - L_b(Q, \nu_0)]$$

Par contre les écritures intégrées, sous l'hypothèse de mailles isothermes (produits de  $1 - \exp(-kl)$  pour émission et/ou absorption et d'exponentielles pour l'atténuation) ne sont pas directement généralisables.

En ce qui concerne l'interprétation physique des puissances nettes échangées en moyenne sur une bande étroite, il est souvent nécessaire de tenir compte non seulement des différences de température et des épaisseurs optiques moyenne ( $\bar{kl}$ ) mais aussi de la structure de spectre. En particulier l'atténuation des rayonnements émis par le gaz est nettement plus forte que celle des rayonnements de paroi dès lors que l'on est confronté à un spectre de raies distinctes (faibles valeurs du paramètre de forme). Pour illustrer cette difficulté d'interprétation, considérons les trois exemples suivants. On considère tout d'abord la puissance nette échangée entre un élément de surface élémentaire  $dS$  autour d'un point  $P$  et une surface plane située à une distance  $l$  de  $P$ , en se limitant à un angle solide élémentaire  $d\Omega(\vec{n})$  dans la direction normale au plan. Les surfaces sont noires et le milieu séparant les deux surfaces et un gaz homogène.



Si de plus,  $dS$  est parallèle au plan, la puissance nette échangée considérée s'écrit :

$$d\Psi^{SS}(l) = \Delta\nu \cdot dS(P) \cdot dl(\vec{n}) \cdot \bar{\tau}(l) \cdot [L_b(P, \nu_0) - L_b(Q, \nu_0)]$$

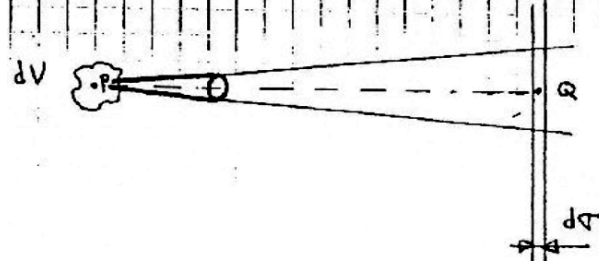
La distance, donc l'effet d'atténuation, n'intervient que dans la transmittivité moyenne  $\bar{\tau}(l)$ . On peut en particulier écrire :

$$d\Psi^{SS}(l) = \bar{\tau}(l) \cdot d\Psi^{SS}(0)$$

Pour construire un exemple d'échange gaz-surface équivalent, on peut remplacer  $dS$  par un volume élémentaire  $dV$ . La puissance nette échangée dans le même angle solide s'écrit :

$$d\Psi^{gS}(l) = \Delta\nu \cdot dV(P) \cdot dl(\vec{n}) \cdot \left[ -\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial l}(l) \right] \cdot [L_b(P, \nu_0) - L_b(Q, \nu_0)]$$

On voit que dans ce cas l'effet de la distance est donnée par la fonction  $\bar{\tau}^g(l) = \frac{\partial_l \bar{\tau}(l)}{\partial_l \bar{\tau}(0)}$  qui est une transmittivité moyenne qui tient compte de la corrélation absorption-émission :  $d\Psi^{gS}(l) = \bar{\tau}^g(l) \cdot d\Psi^{gS}(0)$ . Enfin, on remplace le plan par une couche de gaz d'épaisseur élémentaire  $d\sigma$ .



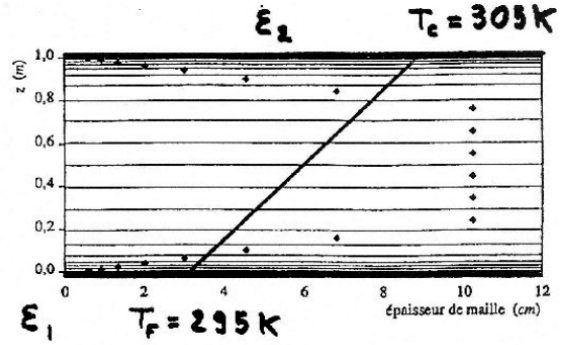
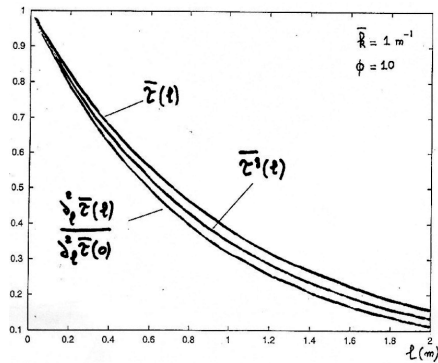
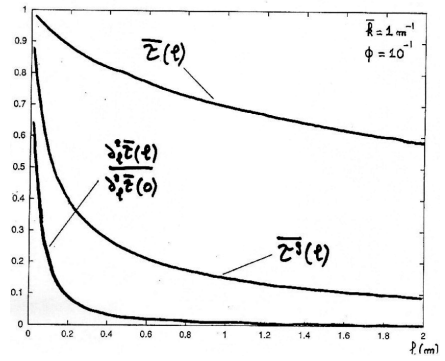
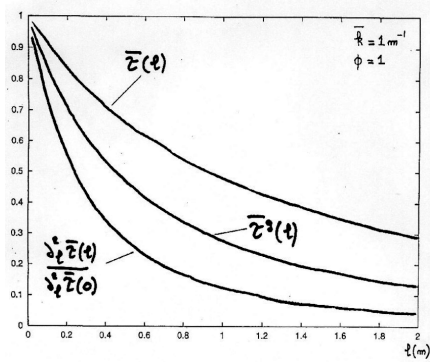
La puissance nette échangée entre les deux volumes s'écrit :

$$d\Psi^{gg}(l) = \Delta\nu \cdot dV(P) \cdot dl(\vec{n}) \cdot d\sigma \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial l^2}(l) \cdot [L_b(P, \nu_0) - L_b(Q, \nu_0)]$$

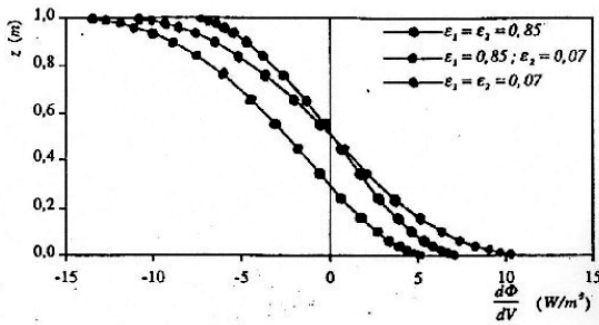
On n'introduit pas ici de nouvelle transmittivité, car cela ne correspond à la transmittivité d'aucun rayonnement réel, néanmoins et de la même façon que précédemment, le rapport  $\frac{\partial_l^2 \tau(l)}{\partial_l^2 \tau(0)}$  traduit l'effet d'atténuation :

$$d\Psi^{gg}(l) = \frac{\partial_l^2 \tau(l)}{\partial_l^2 \tau(0)} d\Psi^{gg}(0)$$

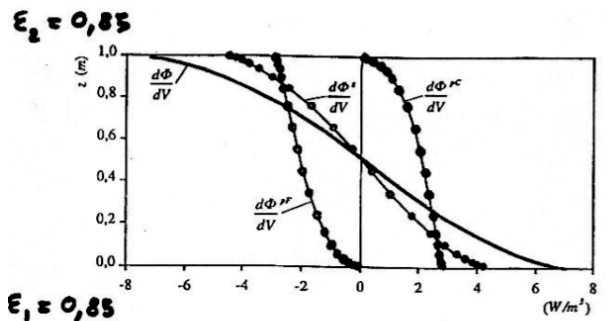
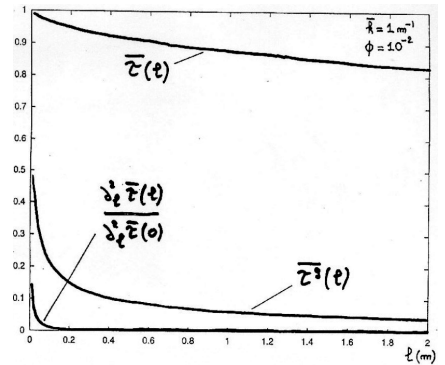




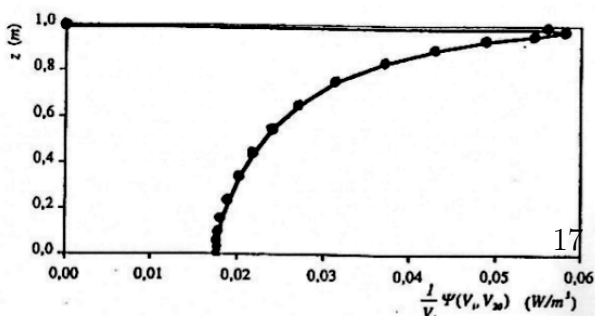
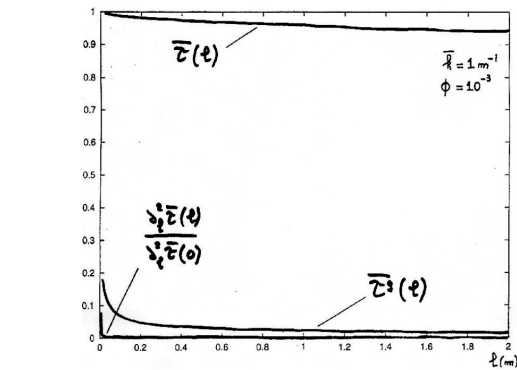
Grabe II-1-1 : Maillage en 20 tranches de gaz pour l'étude du profil linéaire de température



Grabe II-1-7 : Bilan radiatif volumique : Influence des émissivités de paroi. Profil linéaire de température :  $T_w = 300K$  ;  $\Delta T = 10K$ . Pression atmosphérique. 50% HR(300K). Réflexion diffuse.



Grabe II-1-2 : Bilan radiatif volumique et décomposition en échanges partiels. Profil linéaire de température :  $T_w = 300K$  ;  $\Delta T = 10K$ . Pression atmosphérique. 50% HR(300K).  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.85$ .



Grabe II-1-3 : Echanges partiels avec la tranche de gaz supérieure. Profil linéaire de température :  $T_w = 300K$  ;  $\Delta T = 10K$ . Pression atmosphérique.  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.85$ .