

Chapitre 1

Examen corrigé : février 2005

1.1 Sujet

1.1.1 Question de cours

Question 1 : Rappeler en quoi l'**atténuation exponentielle** et la notion d'**absence de mémoire** sont à la base de la démonstration de l'équation de transport et donc de l'équation de transfert radiatif en monochromatique.

Question 2 : Réciproquement, comment peut-on retrouver ces deux images à partir de l'équation de transfert radiatif ?

Question 3 : Montrez que ces deux images ne sont plus valables (et donc que l'équation de transfert radiatif n'est plus directement utilisable) pour un rayonnement intégré sur une bande spectrale.

1.1.2 Problème

On étudie ici des problèmes de transfert radiatif stationnaire dans des milieux à indice de réfraction uniforme égal à l'unité.

La géométrie du système considéré est monodimensionnelle (même si le rayonnement se propage quand à lui dans toutes les directions de l'espace) et on note Ox le repère monodimensionnel associé. Il s'agit d'une couche de gaz contenue entre deux parois noires parallèles, S_1 et S_2 , perpendiculaires à Ox , intersectant Ox en $x = 0$ et en $x = e$ (couche d'épaisseur e). Les caractéristiques du gaz (propriétés radiatives, température) ne dépendent que de la coordonnée x .

La couche est non diffusives (albedo de diffusion simple nul) et le coefficient d'absorption $k_{a,\nu}$ est uniforme.

Pour les raisonnements menés en modèle monochromatique, la luminance du rayonnement d'équilibre à la température locale $T(x)$ sera notée simplement $L_\nu^0(x)$. De même, la luminance du rayonnement d'équilibre à la température T_{p1} de la paroi S_1 (en $x = 0$) sera notée $L_{p1,\nu}^0$ et la luminance du rayonnement d'équilibre à la température T_{p2} de la paroi S_2 (en $x = e$) sera notée $L_{p2,\nu}^0$.

Pour les raisonnements menés de façon intégrée sur une bande spectrale $[\nu_1, \nu_2]$, les notations suivantes seront utilisées : $L^0(x) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L_\nu^0(x) d\nu$, $L_{p1}^0 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L_{p1,\nu}^0 d\nu$ et $L_{p2}^0 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L_{p2,\nu}^0 d\nu$.

Etudes qualitatives : Dans ce paragraphe, il vous est demandé de proposer une série d'analyses qualitatives. Vous essayerez dans chaque cas de préciser les valeurs limites et à défaut d'indiquer quelques ordres de grandeur (d'indiquer grossièrement quelques valeurs sur les axes).

On raisonne en modèle monochromatique et on considère les deux configurations académiques suivantes :

- Couche isotherme : $L_\nu^0(x) = A$, $L_{p1,\nu}^0 = A/2$, $L_{p2,\nu}^0 = 0$.
- Profil sinusoidal : $L_\nu^0(x) = A[1 + \sin(2\pi x/e)]$, $L_{p1,\nu}^0 = A$, $L_{p2,\nu}^0 = A$.

Dans les deux cas, A est une constante homogène à une luminance monochromatique.

Question 1 : Donner qualitativement, pour chaque configuration, l'évolution du flux net radiatif de la paroi 1 (celle en $x = 0$) en fonction du coefficient d'absorption.

Question 2 : Donner qualitativement, pour chaque configuration, l'évolution du bilan radiatif volumique, $-\text{div}(\vec{j}_R)$, en fonction de x , pour trois valeurs du coefficient d'absorption : $k_{a,\nu} = 10^{-2}/e$, $k_{a,\nu} = 1/e$ et $k_{a,\nu} = 10^{+2}/e$.

Etude quantitative 1 : Pour la configuration sinusoidale précédente, exprimer le bilan radiatif volumique en fonction de x pour $k_{a,\nu} = 10^{+2}/e$ à l'aide de l'approximation de Rosseland. Pourquoi cette approximation n'est-elle valable qu'à partir d'une certaine distance des parois ? Quelle est approximativement cette distance ?

Etude quantitative 2 : Toujours pour la configuration sinusoidale précédente, proposer une expression approchée du bilan radiatif volumique en fonction de x pour $k_{a,\nu} = 10^{-2}/e$.

Intégration spectrale : On considère une bande étroite $[\nu_1, \nu_2]$ et on raisonne maintenant sur des grandeurs radiatives intégrées sur cette bande étroite. La configuration considérée est analogue à la configuration sinusoidale précédente : $L^0(x) = A[1 + \sin(2\pi x/e)]$, $L_{p1}^0 = A$, $L_{p2}^0 = A$.

Le spectre d'absorption au sein de cette bande étroite est un spectre de raies qui est pris en compte de façon très simplifiée en admettant que :

- pour une fraction $f_1 = 0.8$ des fréquences, l'absorption correspond à des effets d'ailes de raies, c'est à dire à de faibles coefficients d'absorption ; on retiendra ici $k_{a,1} = 10^{-2}/e$.
- pour les autres fréquences ($f_2 = 1 - f_1 = 0.2$) il s'agit d'absorptions fortes, en centres de raies ; on retiendra ici $k_{a,2} = 10^{+2}/e$.

Il en résulte le modèle suivant pour la transmittivité moyenne sur la bande étroite : $\bar{\tau}(d) = f_1 \exp(-k_{a,1}d) + f_2 \exp(-k_{a,2}d)$.

Question 1 : Peut-on se servir directement des résultats des deux études quantitatives précédentes (en les supposant acquis) pour obtenir une expression approchée du bilan radiatif volumique en fonction de x ?

Question 2 : On découpe virtuellement la couche de gaz en trois sous-couches. Une sous-couche V_1 entre $x = 0$ et $x = 0.2e$, une sous-couche V_2 entre $x = 0.2e$ et $x = 0.3e$ et une sous-couche V_3 entre $x = 0.3e$ et $x = e$. A l'aide de $\bar{\tau}$ et en supposant que V_1 , V_2 et V_3 sont isothermes, donner une expression intégrale de la puissance nette échangée entre V_2 et V_3 ainsi que de la puissance nette échangée entre V_2 et S_1 .

Question 3 : Pouvez-vous reprendre la question précédente sans faire l'hypothèse d'isothermie des sous-couches ?

Question 4 : Pouvez-vous faire un lien entre ces expressions intégrales et les résultats de l'**analyse quantitative 1** et de l'**analyse quantitative 2** (ce qui revient à proposer des expressions approchées pour ces deux puissances nettes échangées en tenant compte de la non-isothermie des volumes) ?

1.2 Correction

1.2.1 Question de cours

Question 1 : *Rappeler en quoi l'atténuation exponentielle et la notion d'absence de mémoire sont à la base de la démonstration de l'équation de transport et donc de l'équation de transfert radiatif en monochromatique.*

Rappeler les grandes lignes de la démonstration de l'équation de transport en insistant plus particulièrement sur l'apparition du terme en $-\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}f$. Dans le cours, avant de commencer la démonstration à proprement parler, nous avons inséré un paragraphe sur l'atténuation exponentielle et l'absence de mémoire. C'est dans ce paragraphe qu'apparaissent les hypothèses les plus fortes de l'équation de transport. Rappeler ces hypothèses et les résultats obtenus et montrer comment on s'appuie sur ces résultats dans la démonstration qui suit.

Question 2 : *Réciproquement, comment peut-on retrouver ces deux images à partir de l'équation de transfert radiatif ?*

Une première proposition peut être d'enlever les termes de transport et le terme source dans l'équation de transport, ce qui conduit à

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}f \quad (1.1)$$

dont la solution est $f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f(\vec{x}, \vec{v}, t_0) \exp\left(-\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}(t - t_0)\right)$. Il suffit alors de rappeler le lien existant entre atténuation exponentielle et absence de mémoire.

Cependant, cette réponse n'est pas très satisfaisante au sens où la composante transport est entièrement absente (pas de déplacement). Une autre façon de faire est de considérer l'équation de transport sans accélération, sans source et au stationnaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}_X(f) = -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}f \quad (1.2)$$

dont la solution est $f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f(\vec{x} - (t - t_0)\vec{v}, \vec{v}, t_0) \exp\left(-\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}(t - t_0)\right)$. L'interprétation de cette solution en terme de transport avec atténuation exponentielle est alors immédiate.

Question 3 : Montrez que ces deux images ne sont plus valables (et donc que l'équation de transfert radiatif n'est plus directement utilisable) pour un rayonnement intégré sur une bande spectrale.

Il suffit de définir la fonction de distribution (ou la luminance) intégrée sur une bande spectrale de largeur $\Delta\nu$, soit $f_{\Delta\nu} = \int_{\Delta\nu} f_\nu d\nu$. Alors, en reprenant les images d'atténuation exponentielle précédentes dans le cas du rayonnement, on obtient

$$f_{\Delta\nu}(\vec{x}, \vec{u}, t) = \int_{\Delta\nu} f_\nu(\vec{x} - (t - t_0) \frac{c}{n_\nu} \vec{u}, \vec{u}, t_0) \exp\left(-\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu}(t - t_0)\right) d\vec{u} \quad (1.3)$$

ce qui ne conduit à une atténuation exponentielle du rayonnement intégré sur la bande que si le milieu est gris. Dans le cas d'un milieu gris en effet, $\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu}$ est indépendant de la fréquence et on peut écrire

$$f_{\Delta\nu}(\vec{x}, \vec{u}, t) = \exp\left(-\frac{c/n}{\lambda}(t - t_0)\right) \int_{\Delta\nu} f_\nu(\vec{x} - (t - t_0) \frac{c}{n_\nu} \vec{u}, \vec{u}, t_0) d\vec{u} \quad (1.4)$$

$$= f_{\Delta\nu}(\vec{x} - (t - t_0) \frac{c}{n_\nu} \vec{u}, \vec{u}, t_0) \exp\left(-\frac{c/n}{\lambda}(t - t_0)\right) \quad (1.5)$$

Si le milieu n'est pas gris, cette formulation n'est pas possible et l'atténuation du rayonnement intégré sur la bande n'est pas exponentielle. L'image physique correspondante est assez simple : le rayonnement est atténué rapidement aux fréquences pour lesquelles $\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu}$ est grand et au bout d'une certaine distance les photons à ces fréquences ont quasiment disparu ; l'atténuation du rayonnement restant est donc plus faible puisqu'il s'agit de photons à des fréquences pour lesquelles $\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu}$ est faible. Si, en proportion de la population restant, l'atténuation n'est pas la même dans les premiers instants qu'ultérieurement, alors l'atténuation n'est pas exponentielle, ce que l'on peut présenter en disant qu'un effet de type mémoire est à l'oeuvre. La mémoire est celle contenue dans le spectre du rayonnement transmis : ce spectre inclut les fréquences à fort $\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu}$ dans les premiers instants, alors qu'ultérieurement il ne reste plus que des fréquences à faible $\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu}$. Il y a bien un effet du temps écoulé sur la façon avec laquelle la population de photons suivis interagit avec la matière.

1.2.2 Problème

Etudes qualitatives :

Question 1 : Donner qualitativement, pour chaque configuration, l'évolution du flux net radiatif de la paroi 1 (celle en $x = 0$) en fonction du coefficient d'absorption.

Dans le cas de la couche isotherme, les deux limites optiquement mince et optiquement épaisse sont très simples. A la limite mince, la paroi n'échange qu'avec la paroi en face (pas avec le gaz intermédiaire). Le flux net radiatif est donc $\psi_{\nu,p1} = \pi(L_{p2,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) = -\pi\frac{A}{2}$ à la limite $k_{a,\nu} = 0$. A la limite épaisse, la paroi ne peut pas échanger avec la paroi en face. Elle n'échange qu'avec le gaz qui se comporte comme un corps noir isotherme. Le flux net radiatif est donc $\psi_{\nu,p1} = \pi(L_{g,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) = +\pi\frac{A}{2}$ à la limite $k_{a,\nu} = +\infty$. La plage de validité de ce raisonnement à la limite épaisse est au delà de quelques unités en épaisseur optique, soit $k_{a,\nu}$ au delà de quelques $1/e$. Le flux net radiatif $\psi_{\nu,p1}$ a donc une asymptote horizontale à partir de quelques $1/e$. Entre ces deux limites, $\psi_{\nu,p1}$ est croissant car plus le milieu est opaque, moins la paroi échange avec la paroi d'en face et plus elle échange avec le gaz intermédiaire. De plus, pour les faibles valeurs de

$k_{a,\nu}$ on peut linéariser les exponentielles et $\psi_{\nu,p1}$ croît donc linéairement. On retient donc que $\psi_{\nu,p1}$ croît linéairement depuis $-\pi\frac{A}{2}$ jusqu'à atteindre l'asymptote à $+\pi\frac{A}{2}$. Si on souhaite aller plus loin dans la description, on peut chercher le coefficient directeur de la partie linéaire. Pour cela, on ne va pas aussi loin dans l'approximation qu'à la limite optiquement mince, on ne néglige pas les atténuations exponentielles mais on les linéarise : $\exp(-k_{a,\nu}d) \approx 1 - k_{a,\nu}d$. Sous cette hypothèse, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\psi_{\nu,1} &= \int_{H^+} d\vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} \left\{ \exp\left(-k_{a,\nu} \frac{e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) (L_{p2,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) + \left[1 - \exp\left(-k_{a,\nu} \frac{e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right)\right] (L_{g,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) \right\} \\ &\approx \int_{H^+} d\vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} \left\{ (1 - k_{a,\nu} \frac{e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}) (L_{p2,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) + k_{a,\nu} \frac{e}{\vec{u} \cdot \vec{n}} (L_{g,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) \right\} \quad (1.6)\end{aligned}$$

$$\approx (1 - 2k_{a,\nu}e)\pi(L_{p2,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) + 2k_{a,\nu}e\pi(L_{g,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0) \quad (1.7)$$

On retrouve $\psi_{\nu,p1} = \pi(L_{p2,\nu}^0 - L_{p1,\nu}^0)$ à la limite $k_{a,\nu} = 0$ et le coefficient directeur de la partie linéaire en $k_{a,\nu}$ est $2\pi e(L_{g,\nu}^0 - L_{p2,\nu}^0) = 2\pi Ae$.

Dans le cas du profil sinusoïdal l'analyse qualitative est plus délicate. A la limite optiquement mince ($k_{a,\nu} = 0$) on obtient $\psi_{\nu,p1} = 0$ car les deux parois sont à la même température. A la limite optiquement épaisse ($k_{a,\nu} = +\infty$) on obtient également $\psi_{\nu,p1} = 0$ car le profil de température est continu au passage du gaz à la paroi. En effet, la paroi échange avec le gaz à proximité, soit une couche de gaz d'une épaisseur de l'ordre du libre parcours moyen d'absorption (c'est à dire $\frac{1}{k_{a,\nu}}$). Quand $k_{a,\nu}$ tend vers $+\infty$ la température moyenne de cette couche tend vers celle de la paroi et la puissance nette échangée entre la paroi et cette couche devient nulle. Aux deux limites $k_{a,\nu} = 0$ et $k_{a,\nu} = +\infty$ on obtient donc $\psi_{\nu,p1} = 0$ et toute la question devient de deviner la forme de la courbe entre ces deux limites. Pour raisonner aux épaisseurs optiques intermédiaires, on peut envisager, comme précédemment, de linéariser les atténuations exponentielles. Mais en faisant cela, lorsque $k_{a,\nu}$ croît, les échanges qui ne se font pas avec la paroi d'en face sont remplacés par des échanges avec l'ensemble du gaz, tous les points du gaz étant perçus de la même façon. Or la température moyenne du gaz est égale à celle de la paroi d'en face. On en conclut donc que dans cette plage de linéarité, $\psi_{\nu,p1}$ est indépendant de $k_{a,\nu}$. La tangente en zero est donc nulle. Au delà de la plage de linéarité, ce que l'on peut dire (sans rentrer dans un véritable travail quantitatif) c'est que les échanges avec les points les plus proches de la surface S_1 se feront avec une atténuation moins forte et seront donc plus intenses. Comme le profil sinusoïdal est croissant puis décroissant, la paroi échangera plus favorablement avec un gaz de température plus élevée que la sienne; elle sera donc plus réchauffée par le gaz proche que refroidie par le gaz plus lointain. $\psi_{\nu,p1}$ sera donc positif. A la limite optiquement épaisse, on peut tenter de donner la forme fonctionnelle de la décroissance de $\psi_{\nu,p1}$ avec $k_{a,\nu}$. Pour cela, on approxime $\psi_{\nu,p1}$ par un échange entre la paroi S_1 et un corps noir isotherme à la température du gaz situé à un libre parcours moyen de la paroi. Cela nous donne $\psi_{\nu,p1} \approx \pi[L_{\nu}^0(\frac{1}{k_{a,\nu}}) - L_{p1,\nu}^0]$. A cette limite $\frac{1}{k_{a,\nu}}$ est petit devant e , donc devant la période du sinus. On peut donc écrire $L_{\nu}^0(\frac{1}{k_{a,\nu}}) \approx A[1 + \frac{2\pi}{k_{a,\nu}e}]$, ce qui nous donne

$$\psi_{\nu,p1} \approx \pi A \frac{2\pi}{k_{a,\nu}e} \quad (1.8)$$

Question 2 : Donner qualitativement, pour chaque configuration, l'évolution du bilan radiatif volumique, $-\text{div}(\vec{j}_R)$, en fonction de x , pour trois valeurs du coefficient d'absorption : $k_{a,\nu} = 10^{-2}/e$, $k_{a,\nu} = 1/e$ et $k_{a,\nu} = 10^{+2}/e$.

Correction à rédiger.

Etude quantitative 1 : *Pour la configuration sinusoidale précédente, exprimer le bilan radiatif volumique en fonction de x pour $k_{a,\nu} = 10^{+2}/e$ à l'aide de l'approximation de Rosseland. Pourquoi cette approximation n'est elle valable qu'à partir d'une certaine distance des parois ? Quelle est approximativement cette distance ?*

Correction à rédiger.

Etude quantitative 2 : *Toujours pour la configuration sinusoidale précédente, proposer une expression approchée du bilan radiatif volumique en fonction de x pour $k_{a,\nu} = 10^{-2}/e$.*

Correction à rédiger.

Intégration spectrale :

Question 1 : *Peut-on se servir directement des résultats des deux études quantitatives précédentes (en les supposant acquis) pour obtenir une expression approchée du bilan radiatif volumique en fonction de x ?*

Les transferts radiatifs sur la bande étroite peuvent être vus comme la somme des transferts radiatifs aux fréquences de type 1 (pour lesquelles $k_{a,1} = 10^{-2}/e$) et des transferts radiatifs aux fréquences de type 2 (pour lesquelles $k_{a,2} = 10^{+2}/e$). Donc la réponse est oui.

Prenons l'exemple du bilan radiatif volumique ψ_ν . Nous connaissons son expression $\psi_{\nu,1}$ pour $k_{a,1} = 10^{-2}/e$. Or la luminance d'équilibre est indépendante de la fréquence dans la bande (du fait de l'hypothèse de bande étroite), donc cette expression $\psi_{\nu,1}$ est valable pour chacune des fréquences pour lesquelles $k_{a,1} = 10^{-2}/e$. La contribution correspondante sur l'ensemble de la bande est donc $f_1 \Delta\nu \psi_{\nu,1}$. On peut raisonner identiquement pour les fréquences telles que $k_{a,2} = 10^{+2}/e$ et écrire que leur contribution est $f_2 \Delta\nu \psi_{\nu,2}$ où $\psi_{\nu,2}$ est l'expression disponible pour les fréquences de type 2. On obtient donc l'expression suivante du bilan radiatif volumique $\psi_{\Delta\nu}$ intégré sur la bande étroite :

$$\psi_{\Delta\nu} = f_1 \Delta\nu \psi_{\nu,1} + f_2 \Delta\nu \psi_{\nu,2} \quad (1.9)$$

Question 2 : *A l'aide de $\bar{\tau}$ et en supposant que V_1 , V_2 et V_3 sont isothermes, donner une expression intégrale de la puissance nette échangée entre V_2 et V_3 ainsi que de la puissance nette échangée entre V_2 et S_1 .*

Une première façon de faire consiste à prendre comme point de départ le constat de la question précédente et à construire des expressions monochromatiques pour $k_{a,1} = 10^{-2}/e$ et pour $k_{a,2} = 10^{+2}/e$ et d'ajouter les contributions correspondantes intégrées sur la bande. Cependant dans la question il est demandé de donner des expressions intégrales construites "à l'aide de $\bar{\tau}$ " ce qui est plus riche car on peut alors remplacer le modèle de $\bar{\tau}$ proposé dans ce problème par un modèle plus complexe. Mais, si on souhaite retenir cette solution, on est contraint d'être très vigilant dans l'utilisation de $\bar{\tau}$ qui n'est pas de forme exponentielle et qui ne vérifie donc pas $\bar{\tau}(d_1 + d_2) = \bar{\tau}(d_1)\bar{\tau}(d_2)$. Une autre façon de présenter les choses est de dire qu'il nous faut tenir compte correctement des corrélations spectrales. Les techniques d'écriture correspondantes sont décrites dans le cours sur l'utilisation des modèles de bande étroite.

Dans le cas présent, cela nous conduit aux expressions suivantes :

$$\psi_{\Delta\nu}(V_2, V_3) = \int_{H^+} d\vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} \left[1 - \bar{\tau}\left(\frac{0.1e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) - \bar{\tau}\left(\frac{0.7e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) + \bar{\tau}\left(\frac{0.8e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) \right] (L_{g3}^0 - L_{g2}^0) \quad (1.10)$$

$$\psi_{\Delta\nu}(V_2, S_1) = \int_{H^+} d\vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} \left[\bar{\tau}\left(\frac{0.2e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) - \bar{\tau}\left(\frac{0.3e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) \right] (L_{p1}^0 - L_{g2}^0) \quad (1.11)$$

où L_{g2}^0 et L_{g3}^0 sont respectivement les luminances d'équilibre intégrées sur la bande étroite, pour les températures de la couche V_2 et de la couche V_3 .

Question 3 : *Pouvez-vous reprendre la question précédente sans faire l'hypothèse d'isothermie des sous-couches ?*

La réponse est bien sûr oui : cela demande simplement de reprendre la démarche précédente au niveau différentiel. On regarde notamment $\psi_{\Delta\nu}(V_2, V_3)$ comme la somme de toutes les puissances nettes échangées entre une couche d'épaisseur différentielle dx dans V_2 et une couche d'épaisseur différentielle dy dans V_3 . Ce qui conduisait notamment à des sommes et des différences de quatre transmittivités moyennes dans l'expression de $\psi_{\Delta\nu}(V_2, V_3)$ dans le cas de couches isothermes, soit $1 - \bar{\tau}\left(\frac{0.1e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) - \bar{\tau}\left(\frac{0.7e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) + \bar{\tau}\left(\frac{0.8e}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right)$, conduit maintenant à la dérivée seconde de la transmittivité moyenne, soit $\frac{dx}{\vec{u} \cdot \vec{n}} \bar{\tau}''\left(\frac{y-x}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) \frac{dy}{\vec{u} \cdot \vec{n}}$. De même, la différence de transmittivités moyennes qui apparaissait dans l'expression de $\psi_{\Delta\nu}(V_2, S_1)$ conduit à une dérivée première de $\bar{\tau}$. On obtient ainsi aux expressions suivantes :

$$\psi_{\Delta\nu}(V_2, V_3) = \int_{H^+} d\vec{u} \int_{0.2e}^{0.3e} dx \int_{0.3e}^e dy \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{n}} \bar{\tau}''\left(\frac{y-x}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right) \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{n}} [L^0(y) - L^0(x)] \quad (1.12)$$

$$\psi_{\Delta\nu}(V_2, S_1) = \int_{H^+} d\vec{u} \int_{0.2e}^{0.3e} dx \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{n}} [-\bar{\tau}'\left(\frac{x}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\right)] [L_{p1}^0 - L^0(x)] \quad (1.13)$$

Question 4 : *Pouvez-vous faire un lien entre ces expressions intégrales et les résultats de l'analyse quantitative 1 et de l'analyse quantitative 2 (ce qui revient à proposer des expressions approchées pour ces deux puissances nettes échangées en tenant compte de la non-isothermie des volumes) ?*

Dans cette question, on ne peut plus raisonner en termes généraux à partir de la seule transmittivité moyenne car nous allons faire des approximations différentes dans les deux parties du spectre, celle correspondant à $k_{a,1} = 10^{-2}/e$ et celle correspondant à $k_{a,2} = 10^{+2}/e$. Nous allons donc écrire, comme dans la réponse à la question 1 :

$$\psi_{\Delta\nu}(V_2, V_3) = f_1 \Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3) + f_2 \Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, V_3) \quad (1.14)$$

et

$$\psi_{\Delta\nu}(V_2, S_1) = f_1 \Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1) + f_2 \Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, S_1) \quad (1.15)$$

et travailler sur chacun des quatre échanges partiels.

Selon les raisonnements usuels aux limites minces et épaisses, on envisagera de négliger les termes $f_1 \Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3)$ et $f_2 \Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, S_1)$ devant les deux autres. En effet

- à la limite optiquement mince les échanges gaz-gaz sont négligeables (les seuls échanges significatifs sont les échanges à distance avec les surfaces), or l'épaisseur optique du système est $e k_{a,1} = 10^{-2}$ aux fréquences de type 1 ;

– à la limite optiquement épaisse les échanges à distance sont négligeables (les seuls échanges significatifs sont les échanges à des distances de l'ordre du libre parcours moyen), or V_2 et S_1 sont séparés d'une couche de gaz d'épaisseur optique $0.2ek_{a,2} = 20$ aux fréquences de type 2. Cependant, ici il s'agit de négliger les échanges à un type de fréquences devant ceux à un autre type de fréquence, et non pas des échanges gaz-gaz devant des échanges gaz-surface, ou des échanges de proximité devant des échanges à distance. Donc tout dépend des valeurs respectives de f_1 et f_2 . Nous serons donc amenés à proposer une approximation au moins grossière de $f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3)$ et $f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, S_1)$ de façon à pouvoir contrôler qu'ils sont effectivement négligeables devant les deux autres termes. Nous aborderons ce point à la fin de la réponse.

Pour le terme $f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1)$, on utilise le fait qu'aux fréquences pour lesquelles le coefficient d'absorption est $k_{a,1} = 10^{-2}/e$ le milieu est optiquement mince ce qui nous permet de négliger les atténuations dans les échanges avec les parois. On écrit donc :

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1) \approx \int_{H^+} d\vec{u} \int_{0.2e}^{0.3e} dx \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{n}} k_{a,1} f_1[L_{p1}^0 - L^0(x)] \quad (1.16)$$

Le lien entre cette écriture et l'écriture intégrale de la question précédente est que L^0 a été remplacé par f_1L^0 (on ne regarde qu'une partie du spectre) et $\bar{\tau}(d)$ a été remplacé par $\exp(-k_{a,1}d)$, ce qui donne $-\bar{\tau}'(d) = k_{a,1}\exp(-k_{a,1}d)$, et en négligeant l'atténuation $-\bar{\tau}'(d) \approx k_{a,1}$. Cette intégrale se simplifie en

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1) \approx 2\pi \int_{0.2e}^{0.3e} dx k_{a,1} f_1[L_{p1}^0 - L^0(x)] \quad (1.17)$$

ou encore

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1) \approx 0.1e \ 2\pi k_{a,1} f_1[L_{p1}^0 - L_{g2}^0] \quad (1.18)$$

où L_{g2}^0 est maintenant la valeur moyenne dans la couche de gaz V_2 de la luminance d'équilibre intégrée sur la bande étroite, soit $L_{g2}^0 = \frac{1}{0.1e} \int_{0.2e}^{0.3e} L^0(x)dx = \Delta\nu A [1 + \frac{1}{0.1e} \frac{e}{2\pi} [\cos(0.4\pi) - \cos(0.6\pi)]]$. L'interprétation physique de cette expression de $f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1)$ est la suivante : l'émission volumique du milieu est $4\pi k_{a,1} f_1L^0(T(x))$, dont seulement la moitié (par symétrie) est émise en direction de la surface S_1 . Comme on néglige les atténuations, on en déduit que la puissance nette volumique échangée avec S_1 est $2\pi k_{a,1} f_1[L_{p1}^0 - L^0(x)]$. Il suffit ensuite d'intégrer sur la couche V_2 d'épaisseur $0.1e$ ce qui fait apparaître l'intégrale de $L^0(x)$ ou encore la moyenne L_{g2}^0 définie ci-dessus (comme il n'y a pas d'atténuation la surface S_1 voit tous les points de V_2 de la même façon et tout se passe comme si elle échangeait avec une couche isotherme à la température moyenne). Numériquement, on retient

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1) \approx k_{a,1}e f_1\Delta\nu A [\cos(0.6\pi) - \cos(0.4\pi)] = -7.87 \ 10^{-3} \Delta\nu A \quad (1.19)$$

Pour le terme $f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, V_3)$, on utilise le fait qu'aux fréquences pour lesquelles le coefficient d'absorption est $k_{a,2} = 10^{+2}/e$ le milieu est optiquement épais. Les échanges entre V_2 et V_3 (qui sont en contact) sont donc essentiellement des échanges de proximité. Pour obtenir une bonne approximation de ces échanges, on peut utiliser le modèle de Rosseland qui nous dit que le flux net radiatif à l'interface entre V_2 et V_3 est $j_R|_{x=0.3e} \approx -\frac{4\pi}{3k_{a,2}} f_1 \frac{\partial L^0}{\partial x} \Big|_{x=0.3e}$. On en déduit

$$f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, V_3) \approx -j_R|_{x=0.3e} \approx \frac{4\pi}{3k_{a,2}} f_1\Delta\nu A \frac{2\pi}{e} \cos(0.6\pi) = -6.51 \ 10^{-2} \Delta\nu A \quad (1.20)$$

De façon à vérifier si les deux autres termes sont effectivement négligeables, on en construit également deux approximations. Pour $f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, S_1)$, on prend une direction moyenne (allongement moyen de 1.66) et on suppose que l'échange se fait entre la surface S_1 et un corps noir à la température de la frontière de V_2 la plus proche de S_1 . Cela conduit à

$$f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, S_1) \approx \exp(-1.66 k_{a,2}0.2e)f_2\pi[L_{p1}^0 - L^0(0.2e)] \quad (1.21)$$

et numériquement, du fait de l'atténuation exponentielle très importante ($1.66 k_{a,2}0.2e = 33.2$) il ne fait aucun doute que $f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, S_1) \ll f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, S_1)$.

Pour le terme $f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3)$ on néglige simplement les atténuations exponentielles ce qui conduit à

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3) \approx \int_{H^+} d\vec{u} \int_{0.2e}^{0.3e} dx \int_{0.3e}^e dy \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{k_{a,1}}{\vec{u} \cdot \vec{n}} \frac{k_{a,1}}{\vec{u} \cdot \vec{n}} f_1[L^0(y) - L^0(x)] \quad (1.22)$$

et, toujours avec l'approximation d'un allongement moyen de 1.66 :

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3) \approx \int_{0.2e}^{0.3e} dx \int_{0.3e}^e dy 1.66k_{a,1} 1.66k_{a,1} f_1\pi[L^0(y) - L^0(x)] \quad (1.23)$$

soit

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3) \approx 0.1e 0.7e 1.66k_{a,1} 1.66k_{a,1} f_1\pi[L_{g3}^0 - L_{g2}^0] \quad (1.24)$$

où L_{g3}^0 est la valeur moyenne dans la couche de gaz V_3 de la luminance d'équilibre intégrée sur la bande, soit $L_{g3}^0 = \frac{1}{0.7e} \int_{0.3e}^e L^0(T(x))dx = \Delta\nu A [1 + \frac{1}{0.7e} \frac{e}{2\pi} [\cos(0.6\pi) - 1]]$. Numériquement, on obtient

$$f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3) \approx -6.21 \cdot 10^{-5} \Delta\nu A \quad (1.25)$$

ce qui confirme bien que $f_1\Delta\nu\psi_{\nu,1}(V_2, V_3) \ll f_2\Delta\nu\psi_{\nu,2}(V_2, V_3)$.

Table des matières

1 Examen corrigé : février 2005	1
1.1 Sujet	1
1.1.1 Question de cours	1
1.1.2 Problème	1
1.2 Correction	3
1.2.1 Question de cours	3
1.2.2 Problème	4