Thermodynamique hors équilibre

17 janvier 2008

Dans un repère cartésien (O, x_1, x_2, x_3), avec comme vecteurs directeurs unitaires $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, on considère une couche de gaz homogène infinie comprise entre les plans $x_1 = 0$ et $x_1 = e$. En un point quelconque $\vec{x}$ de la couche, pour une vitesse quelconque $\vec{v}$, on note $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ la fonction de distribution des électrons libres à l'instant t. A l'instant $t = 0$, aucun électron libre n'est présent dans la couche, soit $f(\vec{x}, \vec{v}, t = 0) = 0$ pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{v}$. A partir de $t = 0$, la couche est soumise à un flux d'électrons incident constant et uniforme sur le plan $x_1 = 0$, soit $f(\vec{x}, \vec{v}, t > 0) = f_i(\vec{v})$ pour tout point $\vec{x}$ du plan $x_1 = 0$ et toute vitesse $\vec{v}$ telle que $\vec{v}.\vec{e_1} > 0$, où f_i est une fonction de $\vec{v}$ uniquemement (indépendante des coordonnées x_2 et x_3, indépendante du temps pour $t > 0$). Les électrons incidents sont des électrons de modules de v ! itesse supérieurs à une valeur v_c donnée. On a donc $f_i(\vec{v}) = 0$ pour tout $\vec{v}$ tel que $||\vec{v}|| < v_c$. On admet que lorsqu'un électron entre en interaction avec une molécule du gaz, cette interaction est une diffusion et le module de la vitesse de l'électron après la diffusion est dans l'intervalle $[0, v_d]$ où v_d est un module de vitesse donné tel que $v_d < v_c$. On admet enfin qu'entre deux diffusions les électrons ne sont soumis à aucune force.

Dans la partie I, on étudie la distribution spatio-temporelle des électrons de vitesse $\vec{v_a}$ avec $\vec{v_a}.\vec{e_1} > 0$ et $||\vec{v_a}|| = v_a > v_c$. Dans la partie II, on étudie la distribution spatiale, en régime stationnaire, des électrons de vitesse $\vec{v_b}$ avec $\vec{v_b}.\vec{e_1} > 0$ et $||\vec{v_b}|| = v_b < v_d$. On notera :

- $\lambda(v)$ le libre parcours moyen des électrons de module de vitesse v ;
- $p(\vec{v}|\vec{v'})$ la densité de probabilité qu'un électron ait une vitesse $\vec{v}$ après une diffusion, sachant que sa vitesse était $\vec{v'}$ avant la diffusion ;
- $S(\vec{x}, \vec{v}, t)$ le terme correspondant aux sources par diffusions entrantes dans l'équation de transport.

Une attention particulière vous est demandée en ce qui concerne la rédaction de l'ensemble de la partie I.

PARTIE I (sans utiliser l'équation de transport)

Question 1 : Définir précisément la fonction de distribution f. Donner en particulier l'unité de f.

Question 2 : A partir de raisonnements sur l'absence de mémoire (décorrélation temporelle), en rappelant les hypothèses usuelles de la théorie du transport quand elles sont nécessaires, montrer que la probabilité qu'un électron incident sur la couche avec une vitesse $\vec{v_a}$ pénètre d'une profondeur

δ au sein de la couche sans vivre de collision est :

$$P_a(\delta) = \exp\left(-\frac{1}{\lambda(v_a)}\frac{\delta}{\vec{u_a}.\vec{e_1}}\right)$$

avec $\vec{u_a} = \frac{\vec{v_a}}{||\vec{v_a}||}$.

Question 3 : En vous servant du fait que $v_a > v_c$, montrer qu'en régime stationnaire, en tout point de la couche,

$$f(\vec{x}, \vec{v_a}, t = +\infty) = f_i(\vec{v_a}) \exp\left(-\frac{1}{\lambda(v_a)}\frac{x_1}{\vec{u_a}.\vec{e_1}}\right)$$

Question 4 : Pour un point quelconque de la couche, $f(\vec{x}, \vec{v}, t = +\infty)$ est donc connu et on sait que $f(\vec{x}, \vec{v}, t = 0) = 0$. Les figures 1, 2 et 3 correspondent à trois propositions concernant l'évolution temporelle de $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ entre $t = 0$ et $t = +\infty$. Laquelle de ces trois évolutions vous semble compatible avec nos hypothèses ? Justifier votre choix et exprimer le temps t_c tel qu'indiqué sur la figure.

PARTIE II (en utilisant l'équation de transport)

Question 1 : Donner l'équation de transport sans détailler les sources.

Question 2 : Exprimer $S(\vec{x}, \vec{v}, t)$ à l'aide de $p(\vec{v}|\vec{v'})$.

Question 3 : On se place en régime stationnaire et on étudie la distribution spatiale des électrons de vitesse $\vec{v_b}$. On admet dans un premier temps que $S(\vec{x}, \vec{v_b}, t) = S_b$ est constant et uniforme. Exprimer $f(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty)$. Commenter l'évolution de $f(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty)$ en fonction de x_1 dans le cas d'une couche d'épaisseur infinie (comportement au voisinage de $x_1 = 0$; comportement pour $x_1 >> \lambda(v_b)$).

Question 4 : En pratique, $S(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty)$ est une fonction décroissante de x_1. On prendra $S(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty) = \alpha \exp\left(-\frac{1}{\lambda(v_b)}\frac{x_1}{\vec{u_b}.\vec{e_1}}\right)$ avec $\vec{u_b} = \frac{\vec{v_b}}{||\vec{v_b}||}$, où α est une constante. Montrer que $f(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty)$ est solution du problème s'il est de la forme

$$f(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty) = K x_1 \exp\left(-\frac{1}{\lambda(v_b)}\frac{x_1}{\vec{u_b}.\vec{e_1}}\right)$$

où K est indépendant de x_1. Déterminer K et commenter l'évolution de $f(\vec{x}, \vec{v_b}, t = +\infty)$ en fonction de x_1.

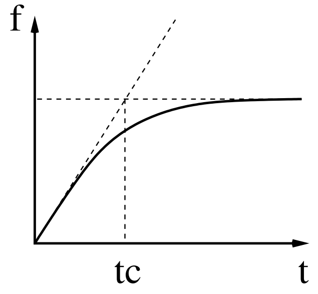

Fig. 1

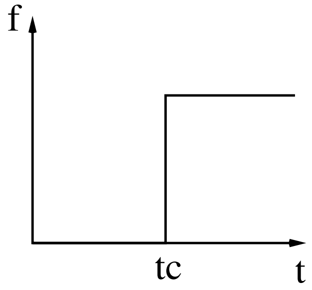

Fig. 2

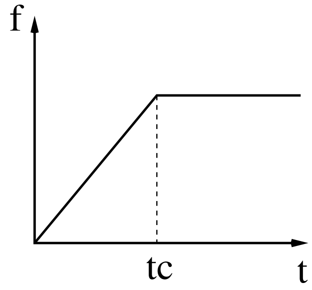

Fig. 3