

Chapitre 1

Equations de transport

Nous présentons ici les principes de modélisation conduisant à la famille des **équations de transport**, souvent appelées également **équations cinétiques**. On parle parfois de façon générique de l'**équation de Boltzmann** en faisant référence aux travaux de Ludwig Boltzmann (1844-1906) sur la cinétique des gaz, des travaux qui sont à l'origine de l'ensemble des approches statistiques du transport corpusculaire. Lorsqu'il est question de l'équation de Boltzmann, il faut donc comprendre, selon le contexte, qu'il est soit fait référence à l'ensemble de la famille des équations de transport, soit plus précisément à la première d'entre elles (introduite en 1878 pour la modélisation de la dynamique des gaz dilués).

1.1 Transport non accéléré entre deux collisions

1.1.1 Enoncé de l'équation de transport

On considère un ensemble de corpuscules *décrits à l'aide d'une position et d'une vitesse*, se déplaçant en *ligne droite à vitesse constante* entre deux événements d'interaction avec un autre corpuscule de même type, ou bien avec le reste de la matière environnante. Les interactions sont supposées *quasi-instantanées* et *quasi-ponctuelles* aux échelles considérées. On note $f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} d\vec{v}$ le nombre de corpuscules se trouvant, à l'instant t , dans un volume élémentaire $d\vec{x}$ autour du point \vec{x} et dans un élément $d\vec{v}$ autour de \vec{v} dans l'espace des vitesses. La fonction f est appelée **fonction de distribution**. Il s'agit d'une densité dans l'espace de phase (espace des positions \times espace des vitesses)¹. On suppose que les lieux des interactions possibles sont *distribués spatialement aléatoirement de façon continue et indépendante*. On note alors $\lambda(\vec{x}, \vec{v}, t)$ le **libre parcours moyen** avant interaction, c'est à dire la moyenne des distances parcourues avant interaction par un corpuscule se propageant à vitesse \vec{v} dans ce milieu aléatoire.

Nous allons montrer que dans ce cadre la fonction de distribution vérifie l'équation suivante (équation de transport) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}_X(f) = -\frac{|\vec{v}|}{\lambda} f + S \quad (1.1)$$

¹Une telle image n'est pertinente que lorsque le nombre total de corpuscules N est suffisamment élevé pour raisonner dans l'esprit de la physique des milieux continus. Nous verrons ultérieurement que lorsque N n'est pas suffisamment élevé pour justifier une telle démarche, alors on peut voir $\frac{1}{N}f$ comme la densité de probabilité de présence d'un corpuscule donné en un point de l'espace de phase. La statistique porte alors sur la répétition de l'expérience.

où $S(\vec{x}, \vec{v}, t)$ est le taux temporel auquel apparaissent, en \vec{x} , des corpuscules de vitesse \vec{v} (corpuscules “émis”, où corpuscules initialement à des vitesses différentes, subissant une interaction en \vec{x} à la suite de laquelle ils se retrouvent à la vitesse \vec{v}). Le symbole \vec{grad}_X correspond à l’opérateur gradient dans l’espace géométrique et nous utiliserons plus loin le symbole \vec{grad}_V pour l’opérateur gradient dans l’espace des vitesses.

Le fait que les corpuscules soient non accélérés entre deux collisions est une hypothèse que nous lèverons ultérieurement, mais les trois autres hypothèses seront communes à l’ensemble des équations de transport :

- les corpuscules sont décrits à l’aide d’une position et d’une vitesse (la position sera parfois remplacée par une coordonnée dans un espace quelconque, non géométrique, et la vitesse pourra être remplacée par un autre descripteur dont la vitesse sera une fonction) ;
- les interactions sont supposées quasi-instantanées et quasi-ponctuelles aux échelles considérées ;
- les lieux des interactions possibles sont distribués spatialement aléatoirement de façon continue et indépendante.

1.1.2 Atténuation exponentielle et absence de mémoire

Considérons un corpuscule en \vec{x} , à l’instant t , se déplaçant à la vitesse \vec{v} . Notons l la distance que parcourt ce corpuscule entre l’instant t et l’instant de sa prochaine interaction avec la matière. On note ensuite $T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d)$ la probabilité qu’à la distance d le corpuscule n’ait pas encore subi d’interaction. $T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d)$ est donc la probabilité que l soit supérieur à d , soit

$$T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d) = \int_d^{+\infty} p_L(l) dl \quad (1.2)$$

où la fonction p_L est la densité de probabilité de l sur $]0, +\infty[$. Pour toute paire de distances (d_1, d_2) , on peut alors écrire :

$$T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_1 + d_2) = T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_1) \Theta(d_2 | d_1) \quad (1.3)$$

où $\Theta(d_2 | d_1)$ est la probabilité conditionnelle que le corpuscule parcourt encore une distance d_2 sans interaction, sachant qu’il a parcouru une distance d_1 sans interaction depuis \vec{x} .

L’hypothèse d’une *distribution aléatoire indépendante des lieux d’interaction* permet d’affirmer qu’il n’y a aucune corrélation statistique entre ce qui advient au corpuscule à partir de la distance d_1 et ce qui est advenu précédemment. C’est l’équivalent d’une absence de mémoire. Cela nous permet d’écrire la probabilité conditionnelle $\Theta(d_2 | d_1)$ comme une fonction de d_2 uniquement, traduisant simplement les probabilités d’interaction au nouveau point $\vec{x}_1 = \vec{x} + d_1 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, à l’instant $t_1 = t + \frac{d_1}{\|\vec{v}\|}$:

$$T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_1 + d_2) = T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_1) T_{\vec{x}_1, \vec{v}, t_1}(d_2) \quad (1.4)$$

Si on admet de plus, temporairement, que le milieu est *uniforme, sans évolution temporelle*, alors les probabilités d’interaction sont identiques pour deux particules de même vitesse en (\vec{x}, t) et en (\vec{x}_1, t_1) . On peut donc écrire $T_{\vec{x}_1, \vec{v}, t_1}(d_2) = T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_2)$ et on en conclut que la fonction $T_{\vec{x}, \vec{v}, t}$ vérifie la propriété suivante :

$$T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_1 + d_2) = T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_1) T_{\vec{x}, \vec{v}, t}(d_2) \quad (1.5)$$

Elle est donc de forme exponentielle et les contraintes $T_{\vec{x},\vec{v},t}(0) = 1$ et $T_{\vec{x},\vec{v},t}(d) \leq 1$ conduisent à

$$T_{\vec{x},\vec{v},t}(d) = \exp\left(-\frac{d}{a}\right) \quad (1.6)$$

où a est un paramètre positif.

En reportant cette expression dans l'équation 1.2 et en dérivant par rapport à d on obtient la densité de probabilité du libre parcours l sous la forme

$$p_L(l) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{l}{a}\right) \quad (1.7)$$

Or nous avons défini λ comme la moyenne des libres parcours l (le libre parcours moyen), ce qui impose la contrainte suivante :

$$\int_0^{+\infty} l p_L(l) dl = \int_0^{+\infty} l \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{l}{a}\right) dl = \lambda \quad (1.8)$$

soit, par intégration par parties :

$$a = \lambda \quad (1.9)$$

On retient finalement, toujours sous l'hypothèse d'un milieu homogène et temporellement invariant :

$$T(d) = \exp\left(-\frac{d}{\lambda}\right) \quad (1.10)$$

$$p_L(l) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) \quad (1.11)$$

Ces deux expressions sont deux formes possibles du modèle d'atténuation d'un faisceau de corpuscules de même vitesse à travers un milieu aléatoire homogène. Dans le domaine des transferts radiatifs ce modèle correspond à la **loi de Beehr-Lambert** et la fonction T est appelé **fonction de transmission** ou **transmittance**. Si un grand nombre N_0 de corpuscules se trouvent en \vec{x}_0 , à l'instant t_0 , avec une vitesse \vec{v} , alors seuls ceux d'entre eux qui n'ont subi aucune interaction avec le milieu se retrouvent après un temps t , à la position $\vec{x}_0 + t\vec{v}$, avec la même vitesse \vec{v} . Si on note $N(t)$ le nombre de ceux-ci, alors par définition la fonction T permet d'écrire :

$$N(t) = N_0 T(\|\vec{v}\|t) = N_0 \exp\left(-\frac{\|\vec{v}\|t}{\lambda}\right) \quad (1.12)$$

où l'on voit que le faisceau s'atténue selon une loi exponentielle. La fonction T , traduisant cette extinction exponentielle, est communément appelée **fonction de transmission** ou **transmittivité**.

Une autre façon d'exprimer la loi de Beehr-Lambert consiste à dire que l'extinction par un milieu aléatoire (c'est à dire sans effet mémoire) est un processus linéaire : le taux temporel d'extinction est simplement proportionnel au nombre de particules présentes. En dérivant l'équation 1.12 on obtient en effet :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} N \quad (1.13)$$

Sous cette forme, il est possible de lever simplement l'hypothèse de *stricte homogénéité* du milieu. Si on considère, comme précédemment, un corpuscule de vitesse \vec{v} en un point \vec{x} dans un milieu hétérogène, on peut toujours imaginer un milieu virtuel dans lequel la distribution spatiale des lieux d'interaction est uniforme et égale à sa valeur en \vec{x} dans le milieu étudié. Cela nous permet de

définir localement le libre parcours moyen $\lambda(\vec{x}, \vec{v}, t)$ comme le libre parcours moyen dans ce milieu uniforme virtuel. Comme l'équation 1.13 est locale (et comme la distribution des lieux d'interaction est continue) elle reste valable en tout point dans le milieu hétérogène (bien que l'équation 1.12 ne soit plus valable du fait de l'hétérogénéité). En intégrant l'équation 1.13, il est facile de voir qu'en milieu hétérogène l'équation 1.12, c'est à dire la loi d'atténuation, se généralise de la façon suivante :

$$N(t) = N_0 \exp \left(- \int_{t_0}^t \frac{\|\vec{v}\|}{\lambda(\vec{x}_0 + t'\vec{v}, \vec{v}, t_0 + t')} dt' \right) \quad (1.14)$$

Ce résultat peut également être présenté en termes de fonction de transmission, l'intégration temporelle étant remplacée par une intégration de l'abscisse curviligne le long de la trajectoire (avec $\sigma_0 = 0$ à $t = t_0$) :

$$T(\sigma) = \exp \left(- \int_0^\sigma \frac{1}{\lambda(\vec{x}_0 + \sigma'\vec{u}, \vec{v}, t_0 + \sigma'/\|\vec{v}\|)} d\sigma' \right) \quad (1.15)$$

où $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est la direction de propagation (généralisation de l'équation 1.10).

1.1.3 Démonstration de l'équation de transport

Considérons un domaine géométrique Ω d'enveloppe Σ . Notons $N_\Omega(\vec{v}, t)d\vec{v}$ le nombre de corpuscules se situant dans Ω , à l'instant t , ayant des vitesses dans l'élément $d\vec{v}$ autour de \vec{v} . Par définition de la fonction de distribution, $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}d\vec{v}$ est le nombre de corpuscules situés dans le volume $d\vec{x}$, à t , avec une vitesse dans $d\vec{v}$. On peut donc écrire :

$$N_\Omega(\vec{v}, t)d\vec{v} = \int_\Omega f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}d\vec{v} \quad (1.16)$$

et si le volume Ω ne se déforme pas dans le temps :

$$\frac{dN_\Omega}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{x} \quad (1.17)$$

On peut également exprimer l'évolution de N_Ω en fonction du temps en considérant successivement les contributions associées au fait que des corpuscules de vitesse \vec{v} :

1. disparaissent suite à une interaction avec la matière environnante (chaque interaction ne se traduit pas nécessairement par une disparition effective, mais on admet que si le corpuscule reste présent dans Ω suite à l'interaction, alors sa vitesse aura été modifiée, elle ne sera plus rigoureusement \vec{v} et le corpuscule ne contribuera plus à $N_\Omega(\vec{v}, t)$);
2. apparaissent au sein de Ω par tous les mécanismes pouvant conduire à l'apparition d'un nouveau corpuscule de vitesse \vec{v} ;
3. entrent dans Ω , ou quittent Ω , à travers sa frontière Σ .

Nous avons vu que les disparitions suite aux interactions suivent une loi exponentielle. L'équation 1.13 peut être appliquée au nombre de corpuscules $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}d\vec{v}$ en tout point \vec{x} de Ω . La contribution correspondante à l'évolution temporelle de N_Ω est donc :

$$\left(\frac{dN_\Omega}{dt} \right)_1 = \int_\Omega -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} f d\vec{x} \quad (1.18)$$

Sans rentrer, pour l'instant, dans le détail des mécanismes pouvant conduire à des apparitions de corpuscules de vitesse \vec{v} , notons $S(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}dt$ le nombre de corpuscules apparaissant dans $d\vec{x}$

pendant dt . La contribution correspondante à l'évolution temporelle de N_Ω est alors simplement :

$$\left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_2 = \int_\Omega S d\vec{x} \quad (1.19)$$

Pour les entrées et sorties à travers la frontière, il suffit d'intégrer sur la frontière la densité surfacique de flux. En tout point \vec{x} de la frontière, cette densité de flux est simplement $-f(\vec{x}, \vec{v}, t)\vec{v}\cdot\vec{n}$ où \vec{n} est la normale sortante en \vec{x} , ce qui conduit à

$$\left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_3 = \int_\Sigma -f\vec{v}\cdot\vec{n}d\vec{x} \quad (1.20)$$

où $d\vec{x}$ est ici un élément de surface car l'intégrale est surfacique. Par application du théorème de Gauss-Ostrogradski, on peut remplacer l'intégrale sur la frontière par une intégrale volumique :

$$\left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_3 = \int_\Omega -div_X(f\vec{v})d\vec{x} \quad (1.21)$$

soit encore :

$$\left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_3 = \int_\Omega -f div_X(\vec{v})d\vec{x} + \int_\Omega -\vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f)d\vec{x} \quad (1.22)$$

Or \vec{v} n'est pas une fonction de l'espace, puisque ce n'est qu'une variable courante dans l'espace des vitesses (\vec{x} et \vec{v} sont deux variables indépendantes permettant de décrire l'espace de phase). Par conséquent $div_X(\vec{v}) = 0$ et on retient :

$$\left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_3 = \int_\Omega -\vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f)d\vec{x} \quad (1.23)$$

En réunissant ces trois contributions, on aboutit à

$$\frac{dN_\Omega}{dt} = \left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_2 + \left(\frac{dN_\Omega}{dt}\right)_3 = \int_\Omega \left\{ -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}f + S - \vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f) \right\} d\vec{x} \quad (1.24)$$

Enfin, en combinant les équations 1.17 et 1.24 on obtient l'égalité suivante :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{x} = \int_\Omega \left\{ -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}f + S - \vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f) \right\} d\vec{x} \quad (1.25)$$

Comme cette égalité est vérifiée pour tout volume Ω elle doit l'être localement, ce qui assure la démonstration de l'équation cinétique (équation 1.1) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f) = -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda}f + S \quad (1.26)$$

1.1.4 Transport de photons

Plaçons nous maintenant dans le cas particulier où les corpuscules considérés sont des photons. Les photons n'interagissent pas entre eux, donc les interactions à prendre en compte ne sont que les interactions entre les photons et la matière dans laquelle ils se propagent. Rappelons les hypothèses conduisant à l'équation cinétique et analysons le sens qu'elles prennent dans ce cas particulier :

- Le point de départ des modèles de transport est la définition d'un ensemble de corpuscules auxquels on peut associer de façon déterministe une position et une vitesse. Pour des applications en rayonnement, cela sous-entend que l'on se place à une échelle où le concept de photon peut être utilisé dans une approche semi-classique. En pratique cela nécessite que les phénomènes de transfert radiatif étudiés soient à des échelles supérieures à la longueur d'onde du rayonnement considéré.

- *Les corpuscules se déplacent en ligne droite à vitesse constante entre deux événements d'interaction avec la matière environnante.* Cette hypothèse sous-entend que l'indice de réfraction est invariant spatialement : la vitesse de la lumière est indépendante de la position et sa propagation est en ligne droite (pas de gradient d'indice de réfraction donc pas d'effet mirage)².
- *Les interactions sont quasi-instantanées et quasi-ponctuelles aux échelles considérées.* Les photons interagissent avec la matière environnante à l'occasion d'absorptions, de diffusions ou de réflexions. La notion de réflexion concerne la modélisation de l'interaction d'un photon avec une surface et non pas avec le milieu qu'il traverse. On aura donc besoin de modèles de réflexion comme conditions aux limites d'un problème de transport, mais pas lors de la modélisation du transport lui-même. L'hypothèse que les interactions sont quasi-instantanées et quasi-ponctuelles ne concerne donc que les phénomènes d'absorption et de diffusion. Cette hypothèse sous-entend donc que la taille des absorbeurs et des diffuseurs (molécules, particules solides, gouttellettes, cristaux, etc) est petite devant la taille du système étudié. Cette taille peut par contre être grande devant la longueur d'onde du rayonnement considéré. Dans l'atmosphère terrestre, on peut par exemple parler de diffuseurs quasi-ponctuels pour des gouttellettes de taille 1mm et un rayonnement de longueur d'onde inférieure au μm .
- *Les lieux des interactions possibles sont distribués spatialement aléatoirement de façon continue et indépendante.* Cette hypothèse sous-entend avant tout qu'il n'y a pas de phénomènes induisant une structuration spatiale et temporelle des absorbeurs et des diffuseurs.

Lorsque l'on applique la théorie du transport à un ensemble de photons, on pose communément l'équation de transport pour un ensemble de photons de même fréquence ν . Ils se propagent tous avec un même module de vitesse $\|\vec{v}\| = c/n_\nu$ où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et n_ν l'indice de réfraction du milieu à la fréquence considérée. La fonction de distribution f_ν est alors une fonction de la position \vec{x} et de la direction de propagation \vec{u} (et non plus du vecteur vitesse). $f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)d\vec{x}d\vec{u}d\nu$ est donc le nombre de photons dans le volume $d\vec{x}$ autour de la position \vec{x} , se propageant selon une direction comprise dans l'angle solide $d\vec{u}$ autour de la direction \vec{u} , dont la fréquence est comprise dans la bande $d\nu$ autour de la fréquence ν . L'équation de transport devient alors :

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{c}{n_\nu} \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}_X(f_\nu) = -\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu} f_\nu + S_\nu \quad (1.28)$$

A ce stade, le terme source (second terme du membre de droite) n'est pas explicité. Ce terme correspond aux photons apparaissant en \vec{x} dans la direction \vec{u} . Le taux d'apparition S_ν (en ce point de l'espace de phase) de photons de fréquence ν , correspond soit à des photons émis par la matière, S_ν^e , soit à des photons se propageant au même point dans d'autres directions et se retrouvant dans la direction \vec{u} suite à une diffusion, S_ν^d . Nous laissons temporairement de côté le

²A rigoureusement parler, la démonstration donnée au paragraphe 1.1.3 n'est pas valable dans le cas du rayonnement, même sous l'hypothèse d'un indice de réfraction uniforme. En effet, l'espace des vitesses \vec{v} accessibles n'est pas un espace de dimension 3 (comme l'espace géométrique) mais de dimension 2. Le module de vitesse est fixé par l'indice de réfraction $\|\vec{v}\| = c/n$ et seule la direction de propagation \vec{u} est libre : $\vec{v} = \frac{c}{n} \vec{u}$. Donc la démonstration est à reprendre en remplaçant $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ par $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$, et donc plus généralement en remplaçant \vec{v} par \vec{u} à toutes les étapes. Seule l'équation 1.20 est à modifier :

$$\left(\frac{dN_\Omega(t)}{dt} \right)_3 = \int_\Sigma -f \frac{c}{n} \vec{u} \cdot \vec{n} d\vec{s} \quad (1.27)$$

Il est ainsi facile de démontrer que l'équation 1.1 reste valable pour un rayonnement dans un milieu à indice de réfraction uniforme (voir le paragraphe 1.2 pour plus de généralité).

phénomène d'émission, dont la modélisation sera abordée au chapitre suivant, mais nous rentrons tout de suite dans quelques détails supplémentaires sur la diffusion de façon à aborder certaines images qui seront nécessaires au paragraphe 1.1.6 pour la modélisation de la cinétique des gaz dilués.

Considérons un photon de fréquence ν se propageant dans la direction \vec{u} et interagissant avec la matière en \vec{x} à l'instant t et notons $\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)$ la probabilité que cette interaction soit une diffusion (et non une absorption). Dans le cas d'une diffusion, notons $W(\vec{u}'; \vec{x}, \vec{u}, t)$ la densité de probabilité (sur la sphère unité) de la direction de propagation \vec{u}' du photon après diffusion. Cette densité de probabilité vérifie donc :

$$\int_{4\pi} W(\vec{u}'; \vec{x}, \vec{u}, t) d\vec{u}' = 1 \quad (1.29)$$

ω_ν est appelé **albédo de diffusion simple** et W est appelé **fonction de phase de diffusion simple**. Avec ces deux définitions, on peut tout d'abord écrire le taux de disparition de photons en deux termes correspondant respectivement aux diffusions et aux absorptions :

$$-\frac{c/n_\nu}{\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)} f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) = -\frac{c}{n_\nu} \left[\frac{\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)}{\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)} f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) + \frac{1 - \omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)}{\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)} f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) \right] \quad (1.30)$$

et on peut ensuite reprendre le terme correspondant aux diffusions en faisant apparaître l'intégrale précédente (cela revient à expliciter le fait que tout photon diffusé se retrouve après diffusion dans l'une des directions \vec{u}' de la sphère unité) :

$$\frac{\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)}{\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)} f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) = \int_{4\pi} \frac{\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)}{\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)} W(\vec{u}'; \vec{x}, \vec{u}, t) f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) d\vec{u}' \quad (1.31)$$

Dans le même esprit, on peut écrire le taux d'apparition de photons dans la direction \vec{u} suite à une diffusion comme une intégrale sur toutes les directions incidentes possibles \vec{u}' :

$$S_\nu^d = \frac{c}{n_\nu} \int_{4\pi} \frac{\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}', t)}{\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}', t)} W(\vec{u}; \vec{x}, \vec{u}', t) f_\nu(\vec{x}, \vec{u}', t) d\vec{u}' \quad (1.32)$$

Au total on obtient la forme suivante de l'équation de transport (dans laquelle seul le terme d'émission n'est pas explicité) :

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{c}{n_\nu} \vec{u} \cdot \vec{grad}_X(f_\nu) = \frac{c}{n_\nu} \int_{4\pi} \left[\frac{\omega'_\nu}{\lambda'_\nu} W(\vec{u}; \vec{x}, \vec{u}', t) f'_\nu - \frac{\omega_\nu}{\lambda_\nu} W(\vec{u}'; \vec{x}, \vec{u}, t) f_\nu \right] d\vec{u}' - \frac{c}{n_\nu} \frac{1 - \omega_\nu}{\lambda_\nu} f_\nu + S_\nu^e \quad (1.33)$$

où f_ν est utilisé comme notation simplifiée pour $f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)$, f'_ν pour $f_\nu(\vec{x}, \vec{u}', t)$, λ_ν pour $\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)$ (libre parcours moyen pour un photon dans la direction \vec{u} , en \vec{x} , à t), λ'_ν pour $\lambda_\nu(\vec{x}, \vec{u}', t)$, ω_ν pour $\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)$ et ω'_ν pour $\omega_\nu(\vec{x}, \vec{u}', t)$. Sous cette forme, apparaît clairement la spécificité du processus de diffusion qui redistribue les photons depuis une direction vers une autre (processus conservatif) par rapport à l'absorption (qui correspond à une disparition complète du photon) et à l'émission (qui correspond à l'apparition d'un photon ex-nihilo).

Cette équation est en général présentée sous une forme différente en utilisant la notion de luminance au lieu de la fonction de distribution. La luminance $L_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t)$ est la puissance du rayonnement, par unité de fréquence autour de ν , se propageant en \vec{x} dans la direction \vec{u} , par unité d'angle solide autour de \vec{u} et par unité de surface normale à la direction \vec{u} . Le lien entre la fonction de distribution et la luminance est alors simplement :

$$L_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) = h\nu c/n_\nu f_\nu(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (1.34)$$

et on aboutit à l'**équation de transfert radiatif** pour un milieu à indice de réfraction uniforme :

$$\frac{n_\nu}{c} \frac{\partial L_\nu}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}_X(L_\nu) = \int_{4\pi} \left[\frac{\omega'_\nu}{\lambda'_\nu} W(\vec{u}; \vec{x}, \vec{u}', t) L'_\nu - \frac{\omega_\nu}{\lambda_\nu} W(\vec{u}'; \vec{x}, \vec{u}, t) L_\nu \right] d\vec{u}' - \frac{1 - \omega_\nu}{\lambda_\nu} L_\nu + \frac{n_\nu}{c} S_\nu^e \quad (1.35)$$

1.1.5 Marche aléatoire en biologie animale

Des modèles de transport très proches de celui du rayonnement sont communément utilisés en biologie pour rendre compte du déplacement d'animaux ou de groupes d'animaux. Il peut s'agir de déplacements selon une ligne (suivi d'une piste avec possibilités d'arrêt ou de retournement), sur une surface (marche aléatoire pour l'exploration d'une surface par un insecte, fouragement d'une colonie de mammifères), ou dans un volume (vols d'insectes, oiseaux, poissons). Le corpuscule considéré est alors soit un individu, soit un groupe constitué, dont on peut définir à tout instant la position et la vitesse de déplacement. Nous considérons ici des situations où il est possible de négliger les variations du module de vitesse au cours du temps; comme pour le rayonnement, l'espace des vitesses se réduit donc à l'ensemble des directions de propagations³.

Comme au paragraphe précédent, reprenons chacune des hypothèses énoncées au début du paragraphe 1.1 pour en discuter le sens dans le présent contexte :

- *Les corpuscules se déplacent en ligne droite à vitesse constante entre deux événements d'interaction.* Il est possible d'avancer des modèles où les individus (ou colonies) modifient leur comportement de déplacement à l'occasion d'interactions (contacts, perceptions) avec leurs congénères ou bien avec d'autres éléments bien identifiés de leur environnement. Néanmoins, dans la plupart des cas, il n'est pas nécessaire de définir une notion d'interaction : le comportement observé est une série de modifications spontanées des caractéristiques du déplacement. Il a par exemple été montré que le déplacement de fourmis ou de blattes sur une surface plane peut être fidèlement représenté par un ensemble de déplacements en ligne droite et de changements de direction aléatoires. Les "interactions" sont alors virtuelles; elles correspondent à des décisions comportementales. Quand à l'hypothèse d'un déplacement rectiligne à vitesse constante entre deux "interactions", elle ne correspond bien sûr à aucune loi fondamentale du comportement animal et son niveau de pertinence est donc à évaluer au cas par cas à partir des observations expérimentales. Nous présenterons ultérieurement un exemple simple de déplacement de poissons où cette approximation s'avère entièrement dénuée de sens.
- *Les interactions sont quasi-instantanées et quasi-ponctuelles aux échelles considérées.* L'identification expérimentale des lieux et instants des changements de direction est toujours une grande source de difficulté. Les changements de direction s'effectuent en effet de façon continue (trajectoire courbe) et les critères de ségmentation de la trajectoire sont toujours très criticables. En tout cas, pour que les "interactions" puissent être supposées quasi-instantanées et quasi-ponctuelles il est fondamental de comparer l'extension géométrique et la durée des

³En pratique la vitesse n'est bien sur jamais strictement de module constant dans le déplacement animal. Cependant, les lois du déplacement ne sont en général pas directement régies par les lois de la mécanique et le module de vitesse n'a donc pas de statut autre que celui d'un des paramètres du déplacement; il ne lui est en particulier associé aucun sens énergétique. Les fluctuations de vitesses s'avèrent donc jouer un rôle de second ordre dans la plupart des cas d'étude. Nous verrons plus loin que les variations du module de vitesse sont par contre au centre de nombreux modèles rendant compte de la cohésion du groupe lors de déplacements en essaim ou en banc.

événements de changement de direction au libre parcours moyen et au temps de parcours correspondant. Si après segmentation d'une trajectoire observée de fourmis, on observe un libre parcours moyen de 1cm et une vitesse moyenne de déplacement de 1cm/s , alors l'extension des zones de courbure de la trajectoire et le temps requis pour un changement de direction devons respectivement être faibles devant 1cm et 1s .

- *Les lieux des interactions possibles sont distribués spatialement aléatoirement de façon continue et indépendante.* Cette hypothèse est fondamentale comme critère d'applicabilité des modèles de transport pour le déplacement animal. En effet, les "interactions" étant virtuelles et correspondant à des décisions comportementales, il faut pouvoir affirmer que ce comportement (changement de direction) peut être modélisé comme étant aléatoire et ne faisant pas appel à la mémoire de l'individu (ou de la colonie). En admettant résolue la difficulté liée à la définition des lieux et instants des "interactions", cette dernière hypothèse peut être facilement testée expérimentalement : il suffit en effet de vérifier que les libres parcours (distances entre deux "interactions") sont distribués aléatoirement selon une loi exponentielle. Il s'agit simplement de la loi de Beehr-Lambert que nous avons introduite au paragraphe 1.1.2 (équation 1.11). Ce caractère exponentiel de la distribution des libres parcours, qui caractérise l'absence de mémoire, est par exemple observé avec une précision remarquable pour des fourmis dont les capacités de mémoire sont pourtant démontrées par ailleurs sans aucune ambiguïté. Cela signifie simplement que les fourmis ne font pas appel à leur mémoire dans le comportement de déplacement étudié.

Sous l'ensemble de ces hypothèses, le modèle comportemental du déplacement animal peut alors se formaliser à l'aide d'une fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ (où \vec{u} est la direction de propagation, le module de vitesse v étant fixé) et conduire à **l'équation de la marche aléatoire diffusive** (en utilisant les mêmes notations que dans l'équation 1.33) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{x}}(f) = v \int_{4\pi} \left[\frac{1}{\lambda'} W(\vec{u}; \vec{x}, \vec{u}', t) f' - \frac{1}{\lambda} W(\vec{u}'; \vec{x}, \vec{u}, t) f \right] d\vec{u}' \quad (1.36)$$

Par rapport l'équation 1.33, la principale différence est ici l'absence d'émission et d'absorption ($S^e = 0$ et $\omega = 0$), ce qui signifie simplement qu'aucun individu n'est enlevé ou rajouté en aucun point du système. On s'intéresse en effet ici à un phénomène de pur déplacement. Mais des termes de type "émission" ou "absorption" apparaissent également dans les équations de transport utilisées en biologie dès lors que l'on complexifie le comportement, notamment en introduisant différents états possibles (niveau d'excitation, type de tâche dans lequel l'individu est impliqué), les passages d'un état à l'autre se traduisant par une "absorption" pour une population d'état et par une "émission" pour l'autre population.

1.1.6 Cinétique des gaz dilués

Après ces deux premiers exemples (rayonnement, marche aléatoire en biologie), nous en arrivons à la cinétique des gaz avec le modèle proposé par Boltzmann pour la cinétique des gaz dilués. La différence fondamentale entre ce modèle et les deux précédents vient du fait que les molécules de gaz interagissent avec elles-mêmes et non pas avec une matière distincte. Il en résulte une équation de transport non linéaire (alors que l'équation de transfert radiatif et l'équation de la marche aléatoire diffuse sont des équations de transport linéaires). Revenons tout d'abord sur les hypothèses de départ :

- *Les corpuscules se déplacent en ligne droite à vitesse constante entre deux événements d'interaction avec la matière environnante.* Les corpuscules sont ici les molécules du gaz. On admet que ces molécules sont toutes identiques et qu'aucune autre matière n'est présente dans le système. En particulier les seules interactions possibles sont celles entre molécules de gaz. Le fait que les molécules se déplacent en ligne droite à vitesse constante entre deux interactions signifie alors, d'une part, que les molécules ne sont soumises à aucun champ de force extérieur et, d'autre part, qu'un événement d'interaction est défini comme une période de temps pendant lequel une molécule n'a plus un comportement de molécule isolé car elle est sous l'influence d'au moins une autre molécule. Ces interactions sont communément appelées *collisions* mais il n'est pas nécessaire de réduire l'image de l'interaction à celle d'un choc entre particules solides : une physique complexe peut être couverte par la notion d'interaction sans aucune remise en cause des fondements de la théorie de Boltzmann.
- *Les interactions sont quasi-instantanées et quasi-ponctuelles aux échelles considérées.* Cela signifie simplement que les temps d'interaction sont faibles devant les temps de parcours isolé et devant les temps d'observation considérés. Le caractère ponctuel en découle au sens où le point de repérage géométrique de la molécule se déplacera d'une faible distance pendant chaque interaction par rapport aux distances parcourues de façon isolée. Cette hypothèse correspond à l'hypothèse de gaz dilué : les distances intermoléculaires sont grandes devant la distance d'interaction entre deux molécules.
- *On peut toujours définir une échelle en dessous de laquelle les lieux des interactions possibles sont distribués spatialement aléatoirement de façon uniforme.* Comme en rayonnement, cette hypothèse sous-entend qu'il n'y a pas de phénomènes induisant une structuration spatiale et temporelle des diffuseurs, mais ici les diffuseurs sont les particules elles-mêmes. Cela signifie que les positions et vitesses de l'ensemble des molécules, qui sont toutes régies par le même mécanisme d'interaction, n'ont aucune corrélation entre elles. Cette hypothèse est une hypothèse forte qui nécessite en particulier que les temps d'observation soient suffisamment grands et que le système contienne un grand nombre de molécules. Dans le cas contraire, l'approche statistique de Boltzmann, fondée sur la fonction de distribution telle que nous l'avons introduite (fonction de distribution à un corpuscule), peut être étendue pour tenir compte des corrélations intermoléculaires dans l'espace de phase. Ce point sera abordé au chapitre ?? avec l'introduction de la notion de fonction de distribution à plusieurs corpuscules.

Au delà de ces hypothèses de départ, on admet de plus ici qu'aucun phénomène ne conduit à des disparitions de molécules (aucune absorption). Le terme source de l'équation 1.1 peut alors être détaillé à l'aide du concept de diffusion de la même façon que dans les deux exemples précédents :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}_{\vec{x}}(f) = \int \left[\frac{\|\vec{v}'\|}{\lambda'} W(\vec{v}; \vec{x}, \vec{v}', t) f' - \frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} W(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t) f \right] d\vec{v}' \quad (1.37)$$

où f est utilisé comme notation simplifiée pour $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, f' pour $f(\vec{x}, \vec{v}', t)$, λ pour $\lambda(\vec{x}, \vec{v}, t)$ (libre parcours moyen pour une molécule de vitesse \vec{v} , en \vec{x} , à t) et λ' pour $\lambda(\vec{x}, \vec{v}', t)$. L'albédo de diffusion simple n'apparaît pas car il n'y a pas d'absorption ($\omega = 1$) et la fonction de phase de diffusion simple est ici une densité de probabilité dans l'espace des vitesses (et non dans l'espace des directions de propagation comme dans les deux exemples précédents où le module de vitesse était fixe) : $W(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t)$ est la densité de probabilité qu'une molécule de vitesse \vec{v} , subissant une

interaction avec une autre molécule en \vec{x} , à t , se retrouve à la vitesse \vec{v}' suite à cette interaction.

À ce stade, aucune spécificité n'est introduite par rapport aux deux exemples précédents. En particulier, la non-linéarité en f n'est pas apparente. Elle n'apparaît qu'en détaillant le libre parcours moyen. En effet, c'est celui-ci qui traduit le fait que les molécules interagissent entre elles et non plus avec une matière extérieure. Pour la cinétique des gaz dilués, λ est donc une fonction de f que nous pouvons expliciter à l'aide de la notion de section efficace.

Considérons une molécule en \vec{x} se déplaçant à la vitesse \vec{v} et analysons ses interactions possibles avec des molécules de vitesse \vec{v}'' . Tout se passe alors comme si la molécule considérée était au repos et était soumise à un flux de molécules incidentes de vitesse $\vec{v}'' - \vec{v}$. Pour chaque molécule incidente, on repère le point d'intersection de sa trajectoire avec le plan perpendiculaire à $\vec{v}'' - \vec{v}$ en \vec{x} . La section efficace $\sigma(\vec{v}'', \vec{v})$ est la surface que définissent autour de la molécule au repos (molécule cible) l'ensemble des points d'intersection correspondant à des molécules incidentes qui entrent en interaction avec la molécule cible. Les molécules passant en dehors de la section efficace n'interagissent pas avec la molécule cible. Le nombre d'interactions par unité de temps est alors simplement $\|\vec{v}'' - \vec{v}\| \sigma(\vec{v}'', \vec{v}) f(\vec{x}, \vec{v}'', t)$. En considérant l'ensemble des vitesses incidentes possibles on peut donc détailler le taux de disparition par interaction en écrivant :

$$\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda(\vec{x}, \vec{v}, t)} = \int \|\vec{v}'' - \vec{v}\| \sigma(\vec{v}'', \vec{v}) f(\vec{x}, \vec{v}'', t) d\vec{v}'' \quad (1.38)$$

On peut alors reprendre l'équation 1.37 en détaillant les interactions (en identifiant la vitesse des molécules avec lesquelles les molécules suivies interagissent) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) = \int d\vec{v}' \int d\vec{v}'' \left[\|\vec{v}'' - \vec{v}'\| \sigma(\vec{v}'', \vec{v}') f'' \hat{W}(\vec{v}; \vec{x}, \vec{v}', t, \vec{v}'') f' - \|\vec{v}'' - \vec{v}\| \sigma(\vec{v}'', \vec{v}) f'' \hat{W}(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t, \vec{v}'') f \right] \quad (1.39)$$

où $f'' \equiv f(\vec{x}, \vec{v}'', t)$ et où $\hat{W}(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t, \vec{v}'')$ est la densité de probabilité qu'une molécule de vitesse \vec{v} , subissant une interaction en \vec{x} , à t , avec une autre molécule de vitesse \vec{v}'' , se retrouve à la vitesse \vec{v}' suite à cette interaction. Si on suppose de plus que la section efficace est indépendante des vitesses de particule, alors on aboutit à l'**équation de Boltzmann** pour la cinétique des gaz dilués :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) = \sigma \int d\vec{v}' \int d\vec{v}'' \left[\|\vec{v}'' - \vec{v}'\| \hat{W}(\vec{v}; \vec{x}, \vec{v}', t, \vec{v}'') f'' f' - \|\vec{v}'' - \vec{v}\| \hat{W}(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t, \vec{v}'') f'' f \right] \quad (1.40)$$

L'équation de Boltzmann apparaît donc comme une équation intégro-différentielle non-linéaire en f : les termes de transport (membre de gauche) restent linéaires, mais le terme collisionnel (membre de droite) contient les produits $f'' f'$ et $f'' f$, ce qui traduit simplement le fait que le nombre de collisions par unité de temps est bien sûr proportionnel au nombre (à la densité) de molécules suivies, mais aussi au nombre (à la densité) de molécules incidentes.

1.2 Transport accéléré entre deux collisions

Dans la section 1.1, nous avons considéré des corpuscules dont l'état était caractérisé par un vecteur position \vec{x} et un vecteur vitesse \vec{v} . Dans un premier temps, nous nous placerons dans le même contexte en rajoutant la prise en compte des phénomènes d'accélération entre deux collisions (paragraphe 1.2.1). Nous aboutirons ainsi à une équation de transport directement exploitable dans le contexte de la cinétique des gaz en présence de forces extérieures (ou de forces intermoléculaires

à longue distance représentées à l'aide d'une approximation de champ moyen). Au paragraphe 1.2.2, nous proposerons ensuite une généralisation qui permettra de traiter des configurations où le déplacement n'est pas décrit par les composantes d'un vecteur vitesse mais par un quelconque autre jeu de descripteurs. Nous avons déjà rencontré ce type de situations aux paragraphes 1.1.4 et 1.1.5 : le déplacement avait lieu à module de vitesse constant et la variable descriptive du déplacement n'était pas le vecteur vitesse mais le vecteur unitaire donnant la direction de déplacement. Dans le même esprit, en incluant les phénomènes d'accélération, il nous sera possible d'aborder les problèmes de transfert radiatif en milieu à indice de réfraction variable, c'est à dire avec des trajectoires de photons non rectilignes (effet mirage, paragraphe ??). Nous considérerons ensuite un exemple en biologie animale avec l'étude d'un banc de poissons où chaque individu se déplace à module de vitesse constant selon une succession de cercles de rayons variables (paragraphe ??).

1.2.1 Cinétique des gaz : prise en compte d'un champ de force

Nous reprenons ici la démonstration proposée au paragraphe 1.1.3 en imaginant un gaz de molécules accélérées par un champ de force quelconque et en tenant compte des variations de vitesse correspondantes entre deux collisions. On notera $\vec{a}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ l'accélération d'une particule de vitesse \vec{v} , à la position \vec{x} , à l'instant t .

Considérons un domaine géométrique Ω_X d'enveloppe Σ_X , ainsi qu'un domaine Ω_V d'enveloppe Σ_V dans l'espace des vitesses. $\Omega_X \times \Omega_V$ est ainsi un domaine de l'espace de phase et on note $N_{\Omega_X \times \Omega_V}(t)$ le nombre de corpuscules se situant dans Ω_X à l'instant t , avec un vecteur vitesse dans Ω_V . On peut alors reprendre les équations 1.16 et 1.17 et écrire :

$$N_{\Omega_X \times \Omega_V}(t) = \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (1.41)$$

$$\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} = \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.42)$$

Comme précédemment, on exprime ensuite l'évolution temporelle de $N_{\Omega_X \times \Omega_V}$ en considérant successivement les contributions associées au fait que des corpuscules :

1. disparaissent de $\Omega_X \times \Omega_V$ du fait d'une interaction avec la matière environnante;
2. apparaissent dans $\Omega_X \times \Omega_V$ par tous les mécanismes pouvant conduire à l'émergence quasi-instantanée d'un nouveau corpuscule de vitesse \vec{v} en \vec{x} ;
3. entrent ou quittent $\Omega_X \times \Omega_V$ en traversant Σ_X dans l'espace géométrique;
4. entrent ou quittent $\Omega_X \times \Omega_V$ en traversant Σ_V dans l'espace des vitesses.

Les deux premiers mécanismes se traduisent par les deux contributions suivantes :

$$\left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} \right)_1 = \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \left\{ -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} f \right\} \quad (1.43)$$

et

$$\left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} \right)_2 = \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} S \quad (1.44)$$

Au delà de l'intégration sur Ω_V , la seule différence conceptuelle par rapport aux équations 1.18 et 1.19 concerne le choix de compter toutes les collisions comme des disparitions et de compenser par la définition des sources. En effet, dans le paragraphe 1.1.3 les corpuscules suivis (ceux comptabilisés

à l'aide de N_Ω) étaient des corpuscules de même vitesse \vec{v} . Les collisions se traduisant soit par une disparition du corpuscule, soit par un changement de vitesse, chaque collision d'un des corpuscules suivis avait pour conséquence de diminuer N_Ω . Dans le cas présent, si une collision fait passer la molécule d'une vitesse \vec{v} à une vitesse \vec{v}' et que \vec{v} et \vec{v}' appartiennent à Ω_V , alors la collision ne fait pas diminuer le nombre de molécule dans $\Omega_X \times \Omega_V$: en effet, la collision est ponctuelle donc la position x est inchangée et le changement quasi-instantané de vitesse ne fait que modifier la position au sein de Ω_V dans l'espace des vitesses. Pour aborder cette difficulté, on fait le choix de comptabiliser toutes les collisions comme des sorties de $\Omega_X \times \Omega_V$, ce qui conduit à l'équation 1.43 et on garde en mémoire le fait que le terme source de l'équation 1.44 devra être défini de sorte à compenser exactement les sorties fictives.

Le troisième mécanisme (entrée/sortie à travers Σ_X dans l'espace géométrique) se traduit également par une contribution comparable à celle obtenue dans le cas de corpuscules non accélérés : la densité de flux de molécules de vitesse \vec{v} traversant Σ_X en \vec{x} est $-f(\vec{x}, \vec{v}, t)\vec{v}\cdot\vec{n}_X$ où \vec{n}_X est la normale à Σ_X sortante en \vec{x} , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt}\right)_3 &= \int_{\Omega_V} d\vec{v} \int_{\Sigma_X} d\vec{x} \{-f\vec{v}\cdot\vec{n}_X\} \\ &= \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \{-div_X(f\vec{v})\} \\ &= \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \{-f div_X(\vec{v}) - \vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f)\} \\ &= \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \{-\vec{v}\cdot\vec{grad}_X(f)\} \end{aligned} \quad (1.45)$$

La seule différence par rapport à l'équation 1.23 est l'intégration sur Ω_V dans l'espace des vitesses. On gardera en mémoire que le passage de l'avant dernière ligne à la dernière ligne de l'équation 1.45 est lié au fait que la vitesse \vec{v} et la position \vec{x} sont des variables indépendantes, ce qui implique $div_X(\vec{v}) = 0$.

Le quatrième mécanisme (entrée/sortie à travers Σ_V dans l'espace des vitesses) se traite de façon identique (à l'exception de la dernière simplification). Il suffit de penser à des molécules repérées par un point \vec{v} dans l'espace des vitesses, se déplaçant à la "vitesse" \vec{a} (l'accélération joue, dans l'espace des vitesses, le même rôle que la vitesse dans l'espace géométrique) et traversant la frontière Σ_V . La densité de flux de molécules de position \vec{x} traversant Σ_V en \vec{v} est $-f(\vec{x}, \vec{v}, t)\vec{a}\cdot\vec{n}_V$ où \vec{n}_V est la normale à Σ_V sortante en \vec{v} , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt}\right)_4 &= \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Sigma_V} d\vec{v} \{-f\vec{a}\cdot\vec{n}_V\} \\ &= \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \{-div_V(f\vec{a})\} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Le symbole div_V signifie l'opérateur divergent dans l'espace des vitesses. Comme précédemment, on peut effectuer le développement $div_V(f\vec{a}) = f div_V(\vec{a}) + \vec{a}\cdot\vec{grad}_V(f)$. Cependant, dans le cas général il n'est pas possible d'affirmer que $div_V(\vec{a})$ prend une valeur nulle. La nullité de $div_X(\vec{v})$ provenait du fait que la vitesse \vec{v} et la position \vec{x} étaient des variables indépendantes, mais ici l'accélération $\vec{a}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ est potentiellement une fonction de la vitesse. Nous reviendrons sur ce point car dans le cas particulier d'un gaz moléculaire, les forces sont le plus souvent des forces hamiltoniennes et dans ce cas, même lorsque la force (donc l'accélération) dépend de la vitesse (songeons notamment

aux forces électromagnétiques) on peut démontrer que $div_V(\vec{a}) = 0$. L'équation 1.46 peut alors être reformulée dans le même esprit que l'équation 1.45. A ce stade, nous restons dans le cadre le plus général et nous laissons le terme $div_V(f\vec{a})$ inchangé.

En réunissant les quatre contributions, on aboutit à

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} &= \left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} \right)_1 + \left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} \right)_2 + \left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} \right)_3 + \left(\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_V}}{dt} \right)_4 \\ &= \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \left\{ -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} f + S - \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) - div_V(f\vec{a}) \right\} d\vec{x} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Enfin, en combinant les équations 1.42 et 1.47 on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} = \int_{\Omega_X} d\vec{x} \int_{\Omega_V} d\vec{v} \left\{ -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} f + S - \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) - div_V(f\vec{a}) \right\} d\vec{x} \quad (1.48)$$

Comme cette égalité est vérifiée pour tout Ω_X et tout Ω_V elle doit l'être localement, ce qui conduit à l'équation de transport dans le contexte de la cinétique des gaz moléculaires avec prise en compte des trajectoires accélérées des molécules entre deux collisions :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) + div_V(f\vec{a}) = -\frac{\|\vec{v}\|}{\lambda} f + S \quad (1.49)$$

Dans le paragraphe 1.1.6 nous avons détaillé les termes collisionnels dans le contexte de la cinétique des gaz dilués. Si nous reprenons le même jeu d'hypothèses et les mêmes notations, nous obtenons une première forme de l'**équation de Boltzmann** avec prise en compte des effets d'accélération :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) + div_V(f\vec{a}) = \sigma \int d\vec{v}' \int d\vec{v}'' \left[\|\vec{v}'' - \vec{v}'\| \hat{W}(\vec{v}; \vec{x}, \vec{v}', t, \vec{v}'') f'' f' - \|\vec{v}'' - \vec{v}\| \hat{W}(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t, \vec{v}'') f'' f \right] \quad (1.50)$$

A ce stade, les forces responsables de l'accélération peuvent être de tout type. On songera notamment à l'étude d'un gaz de macro-molécules telles que des colloïdes dans un bain de molécules de petite taille, des molécules d'eau par exemple. Si il est possible de suivre les colloïdes en traitant les forces d'interaction avec l'eau comme des forces extérieures, alors ces forces pourront ne pas être hamiltoniennes et l'équation 1.51 devra rester sous cette forme. Cependant, dans la plupart des écoulement de gaz moléculaires dilués, les molécules suivies sont les seuls éléments de la matière environnante et les forces extérieures font partie des forces élémentaires et sont donc hamiltoniennes. Dans ce cas, comme mentionné ci-dessus, $div_V(\vec{a}) = 0$ et on obtient l'équation de Boltzmann la plus répandue :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{grad}_X(f) + \vec{a} \cdot \vec{grad}_V(f) = \sigma \int d\vec{v}' \int d\vec{v}'' \left[\|\vec{v}'' - \vec{v}'\| \hat{W}(\vec{v}; \vec{x}, \vec{v}', t, \vec{v}'') f'' f' - \|\vec{v}'' - \vec{v}\| \hat{W}(\vec{v}'; \vec{x}, \vec{v}, t, \vec{v}'') f'' f \right] \quad (1.51)$$

Mais on retiendra que l'écriture du terme d'accélération sous cette forme sous-entend une hypothèse forte en ce qui concerne le type de forces en présence.

1.2.2 Généralisation

1.2.3 Transport de photons : milieu à indice de réfraction non uniforme

1.2.4 Marche aléatoire en biologie animale : trajectoires courbes dans les modèles de déplacement de poissons

Table des matières

1	Equations de transport	1
1.1	Transport non accéléré entre deux collisions	1
1.1.1	Enoncé de l'équation de transport	1
1.1.2	Atténuation exponentielle et absence de mémoire	2
1.1.3	Démonstration de l'équation de transport	4
1.1.4	Transport de photons	5
1.1.5	Marche aléatoire en biologie animale	8
1.1.6	Cinétique des gaz dilués	9
1.2	Transport accéléré entre deux collisions	11
1.2.1	Cinétique des gaz : prise en compte d'un champ de force	12
1.2.2	Généralisation	14
1.2.3	Transport de photons : milieu à indice de réfraction non uniforme	14
1.2.4	Marche aléatoire en biologie animale : trajectoires courbes dans les modèles de déplacement de poissons	14